Wielcy polscy matematycy znani i nieznani

Scenariusze lekcji matematyki i nie tylko

SPIS TREŚCI

Fundacja mBanku

Dodajemy możliwości, mnożymy talenty

W Fundacji mBanku doceniamy społeczną wagę matematyki, dlatego stawiamy sobie za cel rozwój świadomości matematycznej uczniów na każdym etapie edukacji.

Matematyka jest fundamentem logicznego myślenia. Pełni ważną rolę w procesach poznawania i rozumienia otaczającego nas świata. Myślenie matematyczne pomaga w codziennym życiu. Jest niezbędne przy podejmowaniu świadomych decyzji, również związanych z finansami, jest ważne w życiu zawodowym. Dobra edukacja matematyczna wpływa na wysoki poziom kompetencji absolwentów studiów, szczególnie nauk ścisłych i ekonomicznych. Specjaliści w dziedzinach, których podstawą są umiejętności matematyczne, będą w przyszłości coraz cenniejsi dla rozwoju gospodarczego kraju.

Fundacja mBanku wspiera pasjonatów matematyki – nauczycieli, społeczników i rodziców – w rozwijaniu myślenia matematycznego u dzieci i młodzieży. Podejmujemy też działania skierowane do studentów.

Przekazujemy dotacje i granty na projekty matematyczne. Ich odbiorcami są przedszkola, szkoły, uczelnie wyższe, organizacje pozarządowe i biblioteki publiczne, a także grupy nieformalne, koła naukowe czy rady rodziców.

Od 2014 roku, realizujemy strategię „m jak matematyka". Dotychczas wsparliśmy ponad 1300 projektów edukacyjnych na łączną kwotę 12 mln zł. Matematyczna misja mFundacji dotarła do ponad 550 tysięcy odbiorców.

Po więcej informacji o dotacjach, programach grantowych, stypendiach i konkursach zapraszamy na stronę mFundacja.pl.

m Fundacja

Fundacja Szkoła z Klasą

Przyszłość świata zależy dziś od mądrej edukacji. W **Fundacji Szkoła z Klasą** chcemy, żeby szkoła uczyła odpowiedzialności za siebie i innych, uważności i współdziałania. Żeby pomagała młodym ludziom samodzielnie odkrywać świat, rozwijać pasje naukowe i zainteresowania oraz budzić wiarę we własne możliwości.

Dlatego od 2002 roku wspieramy nauczycieli i wspólnie z nimi wprowadzamy do szkół nowoczesne narzędzia i metody pracy. Nasze programy pomagają wychodzić poza schematy w uczeniu i w szkolnych relacjach. Bo jaka edukacja, taki świat.

Na co dzień proponujemy dyrektorom i nauczycielom w Polsce i zagranicą szkolenia, warsztaty, mentorskie wsparcie, innowacyjne materiały i narzędzia edukacyjne z różnych przedmiotów i dziedzin.

www.szkolazklasa.org.pl

SZKOŁA Z KLASĄ FUNDACJA

Wstęp

Fundację mBanku i Fundację Szkoła z Klasą łączy przekonanie, że szkoła powinna rozbudzać w uczniach ciekawość, inspirować do samodzielnego odkrywania świata i pokazywać, że nauka dla każdego może być fascynującą przygodą. Chcemy przełamywać stereotypowy szkolny podział na nauki ścisłe i humanistyczne i wspierać młodych ludzi w rozwiązywaniu problemów w twórczy sposób, wykorzystując wiedzę i umiejętności z różnych dziedzin.

Publikacja, którą oddajemy w Wasze ręce, zawiera praktyczne pomysły na lekcje, które ten podział przełamują i które pomagają rozwijać w uczniach ciekawość świata.

Mamy nadzieję, że podczas zajęć prowadzonych według naszych scenariuszy uczniowie zobaczą, jak ważna jest biegłość w przelewaniu myśli na papier i opowiadaniu o swoich odkryciach. Dostrzegą, w jaki sposób matematyczne odkrycia zmieniły bieg historii i jak historyczne decyzje polityków wpłynęły na rozwój myśli matematycznej. Młodzi ludzie odkryją też, jakie matematyczne prawidła rządzą światem przyrody i wejdą w rolę naukowców, którzy do łamania zaszyfrowanych wiadomości wykorzystywali wiedzę z historii i matematyki.

Każde zajęcia wymagają od uczniów wykorzystania umiejętności z kilku różnych dziedzin. Dlatego też scenariusze najlepiej sprawdzą się, jeśli zdecydujecie się prowadzić lekcje wspólnie z nauczycielami innych przedmiotów: matematyki, historii, geografii, wiedzy o społeczeństwie, polskiego.

Lekcje przygotowaliśmy przede wszystkim z myślą o uczniach z klas IV-VIII szkoły podstawowej. Dobrze sprawdzą się także ze starszymi uczniami, zarówno do wprowadzenia nowych tematów, jak i na podsumowanie działu.

Mamy nadzieję, że praca ze scenariuszami sprawi zarówno Wam, jak i Waszym uczniom dużo radości.

Wprowadzenie
– materiały metodyczne dla nauczycieli

Źródła i materiały historyczne w nauczaniu przedmiotów ścisłych

Kamil Paździor

Jestem tylko humanistą

Tradycyjny podział na nauki humanistyczne oraz ścisłe – matematyczne i przyrodnicze (STEM – *science, technology, engineering and math*) – jest coraz mniej przydatny. Humaniści analizują dane, politechniki wprowadzają dla swoich studentów elementy nauk społecznych, a Finowie planują rezygnację z podziału na tradycyjne przedmioty. Tymczasem w Polsce matematyka i fizyka tkwią w plątaninie uprzedzeń i stereotypów oraz kojarzą się wielu uczniom z bezradnością i stresem. Szkoły nie doganiają dynamicznie rozwijającej się nauki. Uczniowie jedyny ratunek widzą w wywieszeniu białej flagi z napisem – jestem humanistą. To tylko pogłębia błędne koło porażek i frustracji. Pozostawmy na boku kwestie organizacyjne i pomyślmy, jak poradzić sobie z tym problemem. Jednym z nich może być wykorzystanie źródeł i materiałów historycznych, w tym artykułów prasowych. Ich zaletą jest zrozumiały i wciągający tekst, który rozwija przy okazji kompetencje czytelnicze ucznia. Mieści się to w założeniach nowej podstawy programowej w zakresie nauczania przedmiotów ścisłych. Uczeń pozyskuje i przetwarza informacje z różnych źródeł, dzięki czemu całościowo rozumie otaczający świat i dostrzega związki między różnymi dziedzinami nauki. Dlatego zastępuj metody podające poszukującymi i wykorzystuj jak najczęściej **metodę projektu.**

Kluczowa rola osobistego zaangażowania

Współczesna psychologia i neurobiologia podkreślają, że uczniowie łatwiej zapamiętują motywują się do nauki, kiedy osobiście angażują się w proces. Możecie wzbudzić zainteresowanie humanisty dobrą opowieścią, ciekawą anegdotą, umiejętnym wprowadzeniem do tematu. Każde zagadnienie teoretyczne ma swój historyczny kontekst. Opowieść o szalonym Pitagorasie, tragicznym losie Galileusza czy Turinga, postępowej Skłodowskiej, celebrycie Einsteinie, skruszonym Noblu, czy konflikcie Edisona z Teslą może stać się haczykiem, na który złowimy naszego humanistę. Mądrzy autorzy podręczników próbują już splatać te wątki i skutecznie uzasadniają sens uczenia się matematyki. Zachęć uczniów, aby przygotowali historyczny kontekst omawianych zagadnień i doceń ich wysiłek. Będzie to okazja, aby przełamać uprzedzena. Dzięki nierachunkowym zadaniom domowym uczniowie mogą nie tylko zdobyć pozytywną ocenę, lecz także zmienić swój stosunek do przedmiotu. Obraz, krótki film i fragment artykułu urozmaicą przesycone ćwiczeniami zajęcia.

Zróbmy to razem

Wyzwaniem pozostaje wyjście poza wąskie specjalizacje i próba współpracy pomiędzy Wami – nauczycielami różnych przedmiotów. Już koordynacja działań między polonistami a historykami w szkole jest niezwykle trudna. Współpraca nauczycieli historii i przedmiotów ścisłych może sprawić Wam trudność. Poświęćcie jednak chwilę na wspólną analizę programu różnych przedmiotów i przedyskutujcie możliwości odwoływania się do treści z innej dziedziny. Wasza współpraca może zaowocować oryginalnymi pomysłami w trakcie realizacji **projektów edukacyjnych.** Najciekawsze z nich, podobnie jak to bywało w wypadku wielu wynalazków, mają przecież zwykle charakter interdyscyplinarny. Dzięki **metodzie projektu** zaangażujecie uczniów w proces nauczania.

Starożytnego Egiptu nie byłoby bez systemu irygacyjnego i kalendarza, czyli zrozumienia podstawowych zasad matematyki, fizyki, astronomii. Bez znajomości geometrii, mechaniki, nie byłoby antycznych cywilizacji. Nie byłoby wyprawy Kolumba, rewolucji przemysłowej i europejskiego panowania nad światem w XIX w., bez eksplozji naukowych wynalazków w naszej części świata. Proch, dynamit i paliwo rakietowe, szyfry, balistyka i medycyna wojskowa, obliczanie wyporności okrętu, potrzeb zaopatrzenia armii i aerodynamiki samolotu wyznaczają dziś teorię i praktykę wojskowości. Elementy tej wiedzy wykorzystują twórcy komputerowych gier strategicznych, które łączą ze sobą wiedzę z zakresu różnych dziedzin, z przedsiębiorczością na czele. Przenieśmy te interdyscyplinarne doświadczenia na grunt szkolny!

Źródła i materiały historyczne mogą być dla Was w tej mierze niewyczerpaną skarbnicą pomysłów. Inspiracje odnajdziecie także na szlakach zabytków techniki i w centrach nauki, ze słynnym warszawskim Centrum Kopernika na czele. Bardziej zaawansowanym uczniom polećmy rosnącą liczbę cyfrowych reedycji polskiej klasyki naukowej i technicznej, np. http://hint.org.pl/itd=matem.

W szkołach podstawowych bardziej przydatne będą krótkie teksty popularnonaukowe. Dlatego w tym opracowaniu proponujemy Wam zadania i ćwiczenia oparte na artykułach dodatku do Gazety Wyborczej – Ale Historia. Fascynujące fakty i niezwykłe opowieści z przeszłości to przecież nieodłączna część matematyki, chemii, czy biologii.

Notatki

O współpracy nauczycieli różnych przedmiotów i integracji różnych dziedzin wiedzy

Janusz Żmijski

Być może ciężko w to uwierzyć, ale znany nam dziś doskonale podział na odrębne dyscypliny naukowe pojawił się dopiero w XX wieku.

Poszczególne dyscypliny szybko zaczęły się rozwijać niezależnie od siebie i wypracowywać własne narzędzia.

Chociaż podział ten miał poważne uzasadnienie i przyczynił się do wielu wynalazków i odkryć, coraz częściej słyszymy, że hamuje rozwój nauki. Wyjątkowo niekorzystny wydaje się podział na **nauki ścisłe i humanistyczne,** często oparty na wzajemnej nieufności i niechęci.

Bardzo wyraźnie widzimy go w szkole – poszczególne przedmioty są odpowiednikami różnych dyscyplin naukowych. Często nauczyciele jednego przedmiotu niewiele wiedzą na temat tego, co aktualnie robią ich koledzy na swoich zajęciach. Nawet jeśli ich pracownia znajduje się tuż obok.

Współcześnie coraz częściej słyszymy, że warto nawiązywać współpracę między nauczycielami różnych przedmiotów. Koncepcje: uczenia się przez całe życie i kompetencji kluczowych wspierają działania łączące nauczanie różnych perspektyw naukowych.

Wielu nauczycieli praktyków zauważa, że **uczenie wielodyscyplinarne** dobrze wpływa na osiągnięcia uczniów, ponieważ:

- dzięki współpracy nauczycieli środowisko szkolne staje się bardziej przyjazne;
- łączenie różnych dziedzin wiedzy pomaga uczniom lepiej zrozumieć materiał i sens nauki;
- uczenie się jest przyjemniejsze i dostosowane do potrzeb uczniów. Dzięki temu uczniowie uczą się lepiej;
- problemy, z którymi spotykamy się na co dzień, często wymagają łączenia wiedzy i umiejętności z wielu dyscyplin;
- szerokie kształcenie w wielu dziedzinach pomaga uczniom przygotować się do satysfakcjonującego życia i pracy.

O czym warto pamiętać, zanim rozpoczniecie współpracę z nauczycielami innych przedmiotów?

Wybierzcie właściwy dla Waszej szkoły poziom integracji

Ważne, aby przy planowaniu współpracy nauczycieli różnych przedmiotów nie przyjąć zbyt ambitnego celu, który trudno będzie zrealizować. W tej publikacji znajdziecie scenariusze zajęć, które pozwalają na przyjęcie różnych strategii działania. Zanim zaczniecie działać, zastanówcie się, który rodzaj oraz **poziom integracji przedmiotowej** jest najbardziej odpowiedni dla tego konkretnego projektu:

- multidyscyplinarny (wieloprzedmiotowy),
- interdyscyplinarny,
- transdyscyplinarny.

Model multidyscyplinarny – jako grupa nauczycieli różnych przedmiotów omawiacie wspólny temat. Działacie w ramach swoich zajęć. Każdy z Was decyduje, które treści z jego przedmiotu są odpowiednie do wybranego tematu. Samodzielnie pracujecie nad nimi na swoich lekcjach.

Podejście interdyscyplinarne – jako grupa nauczycieli różnych przedmiotów przygotowujecie i realizujecie jeden wspólny program nauczania. Możecie zastosować metodę projektu edukacyjnego. Rzadziej wybierajcie formę odrębnych zajęć, ponieważ trudniej jest je pogodzić z programem całej szkoły.

Transcyplinarność – przygotowujecie program nauczania wokół pytań uczniów lub tematu z życia codziennego. Uczniowie uczą się dzięki temu, że rozwiązują problemy. Możecie też zastosować **uczenie się poprzez zaangażowanie** (*service learning*). Tylko niektóre narzędzia i idee, których używacie podczas nauczania przedmiotów, mogą się Wam przydać. Wspólnie z uczniami wybierzcie temat, który ich interesuje i w który chcą się zaangażować. Nie każdy temat, który Wam wydaje się ważny, będzie ciekawy dla uczniów.

Uczenie się poprzez zaangażowanie *(service learning)*

Uczniowie zdobywają wiedzę i umiejętności, w trakcie pracy społecznej. Istotne są tu trzy elementy:

- uczniowie pomagają osobom, które żyją w okolicy,
- uczniowie uczą się w trakcie zajęć szkolnych lub kursów uniwersyteckich,
- uczniowie zastanawiają się nad tym, co robią, łączą wiedzę z działaniami na rzecz innych ludzi.

Efektem ich pracy i refleksji jest portfolio, blog albo dyskusja.

√ Planujcie działania wspólnie od samego początku

Najtrudniejszym zadaniem w formach uczenia, które łączą różne dyscypliny, jest rozwinięcie współpracy między nauczycielami. Ważne jest zaangażowanie – Wasze oraz uczniów – w działania już od etapu planowania. Powinniście wspólnie tworzyć **plan współpracy** od samego początku. Zaproście do planowania uczniów. Udział w Waszych działaniach sprawi, że będą czuli się częścią projektu. Sięgnijcie do takich metod, jak **gwiazda pytań, planowanie z przyszłości, mapa mentalna projektu** czy **kafejka edukacyjna.**

Gwiazda pytań

Używamy jej do rozwiązywania problemów i planowania zmian. Analizujemy problem przez poszukiwanie odpowiedzi na sześć pytań z rysunku. Odpowiedzi możemy wpisać na schemat lub plakat. W większej grupie możemy pracować w małych zespołach i znaleźć wspólne propozycje podczas końcowej dyskusji.

Kafejka edukacyjna (World Cafe, rozmowa stoliczkowa, rozmowa kawiarniana, metoda kawiarnianej atmosfery)

Służy do analizy różnych aspektów problemu czy tematu. Pracujemy w małych grupach przy osobnych stolikach nad zagadnieniami, które składają się na całość problemu. Korzystamy z zestawu pytań, które nadają kierunek dyskusji. Po zakończeniu pracy nad tematem, grupy chodzą między stolikami, by przedyskutować inne aspekty. Przy stolikach pozostają gospodarze – moderatorzy, którzy opowiadają innym grupom o najważniejszych wnioskach z rozmowy swojej grupy. Dzielą się efektami dyskusji, wyjaśniają oraz notują zgłaszane pomysły. Po przejściu grup przez wszystkie stanowiska – podsumowujemy dyskusję. Gospodarze opowiadają wszystkim o efektach pracy wokół zagadnienia.

Planowanie z przyszłości

Sposób działania, który składa się z następujących etapów:

1. Przenieście się wyobraźnią w przyszłość i stwórzcie obraz tego, co chcecie osiągnąć tak realistycznie, jakby to się już wydarzyło.
2. Określcie, co i kiedy musicie zrobić.
3. Doprecyzujcie, jak będziecie działali.
4. Zastanówcie się, czego potrzebujecie do realizacji Waszych działań.
5. Narysujcie oś czasu i wpiszcie na nią pojedyncze cele, potrzebne, aby zrealizować Wasz pomysł. Przygotowując ścieżkę krytyczną, używajcie czasu teraźniejszego, tak jakbyście już zrealizowali planowane zadania. To zmotywuje Was do pracy i pomoże skupić zbiorową uwagę.

Urszula Małek, „Wybrane techniki planowania”

Praca metodą mapy umysłu *(mind-mapping)* przy grupowym planowaniu działania

Mapa umysłu pozwala nam planować i analizować zagadnienia. Technikę tę opracował Tony Buzan. Jeśli chcemy wykorzystać ją podczas pracy w klasie, dajmy uczniom materiał na tworzoną przez nich mapę. Może to być duża tablica albo kilka arkuszy papieru flipczartowego lub pakowego umieszczonych obok siebie.

Instrukcja dla uczniów:

- Wyobraźcie sobie, że rysujecie plan miasta, patrząc na niego z góry. Od jego centrum odchodzą główne ulice, od nich – boczne przecznice, od tych z kolei – zaułki.
- Na środku kartki lub plakatu wpiszcie dużymi, drukowanymi literami przedmiot planowania.
- Główne etapy planowanego działania zapiszcie drukowanymi literami nad pogrubionymi liniami – to będą główne ulice. Jeśli to możliwe – używajcie tylko rzeczowników, to słowa – klucze.
- Skojarzenia z każdym z etapów działania zanotujcie w pobliżu i połączcie liniami z główną linią. Tak powstaną boczne ulice i zaułki. Opiszcie je, wykorzystując dwa-trzy słowa, znaki zapytania, piktogramy, powszechnie stosowane skróty.
- Uważajcie, żeby na początku nie umknął Wam żaden element. Zapisujcie wszystko – także te elementy, które w pierwszej chwili trudno jest przyporządkować. Później połączycie je z odpowiednią „główną ulicą". Jeśli nie macie pomysłu na hasłowy zapis, użyjcie innych wyrazów. Jednak starajcie się ograniczać ilość słów. Mapa jest wtedy bardziej czytelna i łatwiej z nią później pracować.
- Wykorzystajcie inne sposoby i zaznaczcie ważniejsze elementy i to, co je łączy. Na przykład – pokolorujcie na czerwono główne ulice i wprowadźcie symbole. Strzałką oznaczcie to, co już zostało zrealizowane. Wykrzyknik, znaki zapytania, ścieżki wykorzystajcie do elementów znajdujących się przy innych głównych liniach, etc.

Pierwszą mapę odłóżcie na pewien czas, żeby nabrać dystansu do zapisu zaplanowanego działania. Następnie narysujcie drugą, ostateczną wersję planu. Uporządkujcie elementy planu i wypełnijcie puste miejsca.

Urszula Małek, „Wybrane techniki planowania"

√ Wyznaczcie koordynatora zespołu

Wyznaczcie koordynatora zespołu nauczycielskiego. Ta osoba będzie kierować procesem i przypominać innym nauczycielom o ich zobowiązaniach.

Skorzystajcie z dostępnych możliwości, by wspólnie działać

Na początku spotykajcie się raz w tygodniu. Wykorzystajcie wszystkie sytuacje szkolne sprzyjające wspólnemu planowaniu: okienka, oczekiwanie na zebranie rady pedagogicznej, itp. Skorzystajcie z któregoś z licznych programów cyfrowych, który umożliwi Wam komunikację przez internet. Gdy wszystko zacznie się dobrze układać, nie będziecie już musieli spotykać się tak często. Zaplanujcie jednak kolejne regularne spotkania, żeby rozwiązywać nieoczekiwane problemy.

√ Dzielcie się wiedzą o tym, czego i jak naucza każdy członek zespołu

Przekazujcie sobie na bieżąco swoje plany, harmonogramy i scenariusze lekcji. Dzięki temu połączycie swoje działania.

√ Umówcie się na harmonogramy

Ustalcie terminy działań w ramach projektu:

- daty rozpoczęcia i zakończenia,
- terminy ewaluacji,
- daty spotkań, aby oceniać postępy i wprowadzać poprawki.

√ Bądźcie czujni i wprowadzajcie zmiany na bieżąco

Możliwe, że będziecie musieli wprowadzać pewne poprawki podczas wspólnej pracy. Bądźcie na to gotowi. Wasze plany muszą być elastyczne!

√ Co możemy osiągnąć dzięki współpracy?

Współpraca z innymi nauczycielami przy realizacji ciekawych edukacyjnych pomysłów jest przyjemna i motywująca. Jest alternatywą dla rutyny w pracy. Dzięki niej wspólnie rozwiążecie problemy.

Uczniowie popatrzą na rozwój idei matematycznych jako na proces historyczny i społeczny. Porozmawiają o tym, co sprzyja rozwojowi talentów matematycznych, docenią również znaczenie środowisk, które wspierają naukę. Możliwe też, że dostrzegą w wielkich polskich matematykach ciekawe i sympatyczne postaci z całkiem ludzkimi cechami i słabościami.

Notatki

Odwrócona lekcja – edukacja dialogu

Anna Wójcik-Jachowicz

√ Wprowadzenie

Punktem wyjścia do rozmowy o **odwróconej lekcji** jest oczywista obserwacja, że świat, w którym żyjemy jest inny niż ten, który pamiętamy z czasów naszej edukacji szkolnej. Różni się także od tego, który znamy z okresu, kiedy przygotowywano nas – nauczycieli – do pracy zawodowej. Przestarzały model szkoły nie nadąża za zmianami i nie jest środowiskiem, w którym uczniowie mogą się rozwijać. Zmiany są niezbędne. Zastanówmy się: dlaczego? Dlaczego mamy zmieniać tryb pracy, nasze sprawdzone metody, wypracowane sposoby i odchodzić od doświadczenia, jakie zdobyliśmy?

Głównym zadaniem szkoły przestało być dostarczanie wiedzy i sprawdzanie jej poziomu u ucznia. Zdarza się, że w dziedzinach, które cieszą się szczególnym zainteresowaniem ze strony młodych ludzi, mają oni wiedzę większą niż nauczyciele. Ponadto świat zmienia się tak szybko, że nie możemy przewidzieć, jakie informacje będą potrzebne uczniom po zakończeniu edukacji. Informacje docierają do nich niemal bez przerwy, dlatego zadaniem nauczyciela staje się wsparcie w nabywaniu umiejętności i kompetencji.

Nie jesteśmy w stanie przewidzieć, co będzie potrzebne za 20 lat uczniom, z którymi teraz pracujemy. Łatwiej możemy domyślić się, jak będzie wyglądał rynek pracy za dekadę. Prawdopodobnie większość pracowników będzie sama decydowała o tym, dla kogo chce pracować, na jakich warunkach i jak podzielić swój czas między różne projekty. Samodzielne planowanie swojej pracy będzie wymagało wewnętrznej regulacji (self-regulation).

Być może pracodawcy będą dzielić się pracownikami, bo każdy będzie posiadał określone kompetencje, a nie będzie zatrudniony na etacie. Pracować będziemy w dużej mierze zdalnie, w często zmieniających się zespołach specjalistów. I właśnie dlatego potrzebujemy zmian w edukacji.

Metoda odwróconej lekcji jest sposobem pracy wartym poznania ze względu na specyfikę pokolenia dzisiejszych dwudziestolatków i młodszych. Uczniowie i młodzi pracownicy nie znają rzeczywistości bez internetu. Nie wszyscy korzystają z niego w równym stopniu, nie wszyscy również mądrze wykorzystują jego możliwości. Jednak dostęp do sieci jest czymś naturalnym.

Młodzi ludzie szybko reagują na zmiany – być może dlatego, że tempo zmian w życiu codziennym jest bardzo duże. Potrafią dostosowywać się do nowych wyzwań. Nawiązują i utrzymują relacje w internecie, dlatego praca mobilna nie będzie dla nich trudnością. Są otwarci, przyzwyczajeni do nowości, bezpośredni i twórczy. Często nie mają zahamowań, choć są mocno zależni od oceny, od akceptacji. Chcą pracować po swojemu – własny styl w pracy jest dla nich bardzo ważny.

Z drugiej strony – inaczej niż wcześniejsze pokolenia – nie przywiązują się do efektów swojej pracy. Łatwo się nimi dzielą, łatwo też podejmują nowe działania. Istotny jest w tej kwestii problem z koncentracją uwagi, który szczególnie dotyczy współczesnych młodych ludzi.

Zmieniły się warunki, w jakich funkcjonuje młodzież i pojawiły się nowe kręgi zainteresowań. Zmieniły się sposoby komunikacji i wzrosła szybkość przepływu informacji. Pojawiły się nowe technologie, które nasi uczniowie wykorzystują zupełnie naturalnie. Być może w tej sytuacji wszystko należy zmienić, zbudować od nowa. Tradycyjne metody mają swoje zalety, spójrzmy jednak na nie w nowy sposób i stosujmy je nieco inaczej – **odwróćmy nasze lekcje.**

√ Czym jest metoda odwróconej lekcji?

Metoda odwróconej lekcji opiera się na kilku założeniach. Pierwsze z nich to **uczenie się pod własnym kierownictwem** (*Self-Directed Learning* – SDL). Sami decydujemy, czego się uczymy, w jaki sposób i ile czasu na to poświęcamy. Nie ograniczamy się do 45 minut lekcji w szkole.

Drugie założenie – **uczymy się najwięcej, kiedy mamy okazję współdziałać, przeżywać, obserwować, współpracować, weryfikować pomysły i rozwiązania.** Dlatego tak ważne jest, aby stworzyć uczniom przyjazną przestrzeń do uczenia się dzięki współdziałaniu. Jeśli sporą część lekcji przeznaczymy na teorię, niewiele czasu pozostaje na działanie praktyczne. **Metoda odwróconej lekcji** sprzyja zwłaszcza pracy w parach lub grupach. Są to najskuteczniejsze sposoby uczenia się. Dlatego **metoda odwróconej lekcji** daje większą przestrzeń dla stosowania znanych od dawna metod aktywizujących, na które zwykle brakuje czasu.

Trzecie założenie – **uczniowie są bardziej zmotywowani, kiedy sami decydują, jak chcą się uczyć.** Mogą wybrać miejsce do nauki, ilość czasu na zapoznanie się z materiałem czy etapy pracy. Uczą się wtedy, kiedy mają na to ochotę.

Aby ułatwić uczniom przyswajanie wiedzy, pozwól im pracować „ich własnym sposobem" oraz dobierz odpowiednie narzędzie nauki: film, podcast, tekst, zdjęcie, prezentację itp. Takie podejście opiera się na **idei nauczania mieszanego** (*blended learning*). Łączy różne materiały dydaktyczne, różne narzędzia pracy i przede wszystkim – nauczanie stacjonarne w klasie z nauczaniem przez internet (*e-learningiem*). Co ważne – nie jest to jednak kurs internetowy, z którego uczniowie korzystają po szkole. Nieodłącznym elementem **metody odwróconej lekcji** są spotkania w klasie.

Metoda odwróconej lekcji wpisuje się również w założenia **oceniania kształtującego.** Uczniowie mają okazję współpracować oraz sprawdzać uzyskaną wiedzę i umiejętności. Otrzymują informację zwrotną na temat swojej pracy nie tylko od Ciebie, lecz także od rówieśników, z którymi się uczą. Bardzo ważne w tej metodzie jest, aby razem z uczniami wyznaczać im konkretne cele, a następnie sprawdzać, czy udało się je osiągnąć. **Odwrócona lekcja** nawiązuje do **strategii nauczania wyprzedzającego.** Jednak z tą różnicą, że uczniowie nie poszukują materiałów samodzielnie, tylko pracują na takich, które im wskażesz. Co ważne – wszyscy uczniowie rozpoczynają naukę na tym samym materiale wyjściowym.

√ Po co odwracać lekcję?

Korzyści z odwróconej lekcji jest wiele:

- efektywniej wykorzystujesz czas – podczas lekcji w szkole, ćwiczysz z uczniami zadania praktyczne;
- zwiększasz możliwości ambitnych i pilnych uczniów. **Metoda odwróconej lekcji** niweluje niekorzystne czynniki, np. nie musisz kilka razy powtarzać tej samej treści;

- uczniowie mogą korzystać z materiałów wielokrotnie i wracać do nich w każdej chwili (np. przed sprawdzianem);
- wątpliwości w czasie lekcji jest mniej, ponieważ uczniowie uzyskują wiele odpowiedzi, kiedy zapoznają się z materiałem;
- uczniowie mogą oswoić się z tematem, dzięki czemu nie czują się niepewnie. Doskonale wiedzą, co będą robić na zajęciach, przez co szanse aktywnej pracy na lekcji są wyrównane;
- kształtujesz u uczniów nawyki terminowości i planowania, ponieważ muszą wykonywać zadania w określonym czasie. Opóźnienie spowoduje, że nie będą mogli aktywnie uczestniczyć w lekcji;
- uczniowie korzystają z rzetelnych, sprawdzonych i uporządkowanych materiałów, dopasowanych do ich możliwości i poziomu wiedzy;
- uczniowie mogą pracować nad materiałem w domu;
- kształtujesz u uczniów postawę odpowiedzialności za uczenie się. Nie mogą siedzieć biernie na lekcji i czekać, aż nauczyciel przekaże im wiedzę.

√ Co musi się zmienić:

- **Organizacja klasy:** korzystając z tej metody nie stoisz przed uczniami i nie przekazujesz im wiedzy w ramach wykładu. Uczniowie nie siedzą biernie w czasie lekcji, tylko aktywnie działają. Ty moderujesz ich pracę, udzielasz wskazówki i dbasz o to, żeby ich praca była spójna z określonym celem.
- **Role:** twoim zadaniem jest planowanie. Musisz wiedzieć, jaki jest cel i który punkt podstawy programowej realizujecie, zgromadzić materiały i zorganizować proces pracy. Ty jesteś mentorem, a uczeń uczestnikiem procesu. Uczeń jest odpowiedzialny za aktywne działanie i realizację zadań.
- **Miejsce aktywności:** w czasie tradycyjnie rozumianej lekcji następuje przekazanie wiedzy. Uczeń powtarza, utrwala i przetwarza materiał w domu, np. w ramach zadania domowego. Odwrócona lekcja to model odwrotny – uczeń zdobywa wiedzę w domu, a w czasie lekcji utrwala ją, doskonali i uzupełnia.

√ Co zrobić, żeby odwrócić lekcję, czyli plan działania

ETAP I

Dobry początek (w klasie)

Rozpocznij lekcję od zaciekawienia uczniów tematem. Możesz odwołać się do ich wiedzy, zadać pytania, przeczytać interesujący fragment tekstu, pokazać niezwykły przedmiot, który łączy się z treścią planowanej lekcji. Spraw, żeby uczniowie chcieli sięgnąć do przygotowanych materiałów.

ETAP II

Udostępnij materiały (w klasie i w domu/w sieci)

Przygotuj materiały, z których będą korzystać uczniowie. Uwzględnij przede wszystkim to, dla jakiej grupy uczniów będą one przeznaczone. Wyjaśnij uczniom przed przystąpieniem do pracy, jakiego rodzaju materiały otrzymają i w jaki sposób z nich korzystać.

ETAP III

Wskaż, czego oczekujesz (w klasie i w domu/w sieci)

Przedstaw uczniom instrukcję i wskazówki – jak korzystać z materiałów. Upewnij się, że uczniowie mogą dotrzeć do przygotowanych materiałów – opracowań, skopiowanych materiałów w wersji papierowej lub elektronicznej. Upewnij się, że wszyscy mają dostęp do sieci.

Wytłumacz, jaki jest cel działania i co chcecie wspólnie osiągnąć. Możesz pokazać przykładowe zadanie lub rozpocząć zajęcia zadając uczniom kilka pytań typu prawda/fałsz. Niech uczniowie udzielają odpowiedzi pisemnie, dzięki czemu będą mieli do nich dostęp po skończonej lekcji. Po zapoznaniu się z materiałami i przećwiczeniu zadań, będą mogli wrócić do pytań i zobaczyć, ile się nauczyli.

- Zanim wprowadzisz **metodę odwróconej lekcji** dokładnie wyjaśnij, na czym polega i co uczniowie mogą dzięki niej zyskać.
- Naucz swoich uczniów pracy z tekstem oraz sprawdzać, czy rozumieją poznawane treści. Dzięki temu będą sobie lepiej radzić z przygotowaniem do lekcji. Jeśli pracujecie z tekstem (a metoda odwróconej lekcji często wykorzystuje teksty), możesz zaproponować **metodę znaków swojego myślenia.**

W czasie lekcji opracujcie symbole, które będą odpowiadały komentarzom:

*****	to ważne
+	to potwierdza moje przypuszczenia
o!	to zupełnie inaczej, niż myślałem
?	to mnie zastanawia
nie	z tym się nie zgadzam
tak	z tym się zgadzam
!	ciekawe

Uczniowie zastanowią się nad fragmentami tekstu i w czasie lekcji porównają swoje spostrzeżenia z refleksjami innych.

ETAP IV

Daj czas (w domu)

Określ czas, jaki uczniowie mają, aby zapoznać się z zagadnieniem. Może to być jeden termin, możecie podzielić pracę na etapy. Przekaż uczniom wszystkie materiały w jednym terminie. To nie Ty, a oni sami decydują, jak rozłożą w czasie pracę, ile razy wrócą do materiałów itd.

ETAP V

Stwórz przestrzeń (w klasie)

Zorganizuj lekcję w taki sposób, żeby uczniowie mogli w praktyce sprawdzić, czego się nauczyli i wykorzystać wiedzę w działaniu. Zaproponuj zadanie w ćwiczeniach, kartę pracy, wspólne tworzenie mapy myśli lub debatę na określony wcześniej temat. Musisz tak zaplanować działania uczniów, abyście mogli sprawdzić, co uczniowie potrafią, osiągnąć założone cele i zobaczyć efekty pracy.

ETAP VI

Pozwól zobaczyć efekt (w klasie)

Zaplanuj czas na sprawdzenie efektów pracy. Możecie zrobić krótki quiz, test, ankietę, wystawę prac, odczytać stworzone materiały. Najważniejsze jest to, żeby podsumowanie lekcji odnosiło się do tego, co było jej celem.

Notatki

Scenariusze zajęć

Kluczowe znaczenie języka
– również w tekstach naukowych

Anna Wójcik-Jachowicz

Poruszane tematy

różne sposoby mówienia na ten sam temat, precyzja opisu a efekt, różnice w wyrazie i ich wpływ na znaczenie; znaczenie interpunkcji dla rozumienia zdania

Wiek uczniów

klasy VI-VIII szkoły podstawowej, klasy I-II szkoły średniej

Możliwość współpracy z nauczycielami

matematyki

Przedmiot

język polski

Zarezerwuj czas

60 minut

Poproś uczniów o przeczytanie

- Beata Maciejewska: „Geniusz i już”, GW, 01.04.2019
- Mariusz Urbanek: „Lwowscy wirtuozi różniczek i całek”, GW, 04.03.2019

Przygotuj przed lekcją

- wydruki Kart Pracy,
- czyste kartki A4.

Krótki opis zadania i cele zajęć

Uczniowie dostrzegają, że język, dobór słów i znajomość odbiorcy są ważne dla skutecznej komunikacji. Kiedy wypowiadamy się nieprecyzyjnie, możemy spotkać się z niezrozumieniem albo nieporozumieniem.

Opis zajęć

Przed zajęciami

W zajęciach wykorzystasz metodę odwróconej lekcji, dlatego przed rozpoczęciem działań porozmawiaj z uczniami o sposobach aktywnego czytania. Możesz wykorzystać metodę zakorzeniania myśli lub śladów mojego myślenia. Możesz również zaproponować uczniom listę słów-kluczy zebranych z obu artykułów. Znajdziesz je na Karcie Pracy nr 1. Poproś, żeby spróbowali zgadnąć, o czym będzie lekcja. Spisz ich pomysły, dzięki temu będą mogli się do nich odnieść po przeczytaniu artykułu. Uczniowie zobaczą, które z tematów udało im się zgadnąć, a które z ich skojarzeń nie pojawiły się w trakcie lekcji.

W czasie lekcji

√ Zadanie 1

Porozmawiaj z uczniami o pracy przed lekcją zadając następujące pytania:

- Jakie informacje zaznaczyliście jako ważne?
- Co było dla was zaskoczeniem?
- Co już wiedzieliście?
- Czy teraz wiecie więcej?

Najpierw możecie rozmawiać w parach. Potem jedna z osób może przedstawić, czego dowiedziała się od kolegi. Dzięki temu sprawdzicie, czy skutecznie się komunikujecie. Jeśli wykorzystaliście metodę słów-kluczy, teraz możecie odpowiedzieć, czy myśleliście słusznie.

√ Zadanie 2

Dobierz uczniów losowo w pary. Każda z par dostaje rysunek i dodatkową czystą kartkę A4.

Przykładowy rysunek znajdziesz w Karcie Pracy nr 2. Uczestnicy siadają plecami do siebie, zadaniem każdej pary jest skopiowanie rysunku.

Jedna z osób widzi i opisuje rysunek, druga ma za zadanie narysować jak najdokładniejszą kopię na podstawie tego opisu. Żeby ćwiczenie przypominało pisanie pracy naukowej – rysunek może być abstrakcyjny. Osoba, która rysuje, nie może zadawać partnerowi pytań w czasie pracy.

- Wspólnie omówcie efekty – czy rysunek jest wierną kopią?
- Co udało się skopiować, co wyszło zupełnie inaczej? Czego brakuje? Jakie komunikaty zrozumieliście inaczej?
- Czego Wam brakowało?
- Jakie wskazówki Wam pomogły?
- Jaki sposób opisu był skuteczny – może porównania, może przymiotniki, może konkretne rzeczowniki?

Kiedy omówicie zadania, możesz odnieść się do fragmentu artykułu „Lwowscy wirtuozi…” oraz do artykułu „Geniusz i już”. W jaki sposób spisywano teorie Banacha? Jak Banach pisał swoje prace? Jak pisał dla studentów? Za co ceniono jego prace? Jaki problem mieli studenci podczas wykładów Banacha? Jaki wpływ miał na to język wykorzystywany przez wykładowcę? A jaki wcześniejsza wiedza słuchaczy? Wspólnie zastanówcie się, jak wykładowca powinien prowadzić zajęcia – czy upraszczać język, tak, żeby wszyscy go rozumieli, czy raczej wprowadzać jak najwięcej nowych pojęć?

* Tutaj możesz zaproponować zadanie z tabletami opisane w zadaniu Po lekcji.

√ Zadanie 3

Podziel uczniów na trzy grupy – każdy z członków grupy będzie pracować samodzielnie. Rozdaj kartki i coś do pisania.

- Pierwszą grupę poproś o narysowanie pojazdu.
- Drugą o narysowanie czegoś, czym można przedostać się na drugą stronę rzeki, jeziora albo stawu.
- Trzecią o narysowanie łódki.

Przedstaw instrukcję pisemnie, żeby uczniowie nie wiedzieli o zadaniach pozostałych grup.

Porównajcie gotowe prace. Prawdopodobnie w trzeciej grupie prace uczniów będą najbardziej do siebie podobne, a w pierwszej najbardziej zróżnicowane. W drugiej grupie mogą pojawić się najbardziej oryginalne i nietypowe pomysły. Z czego to wynika? Wyciągnijcie wnioski na temat precyzji określania zadania, pojęcia. Zastanówcie się, kiedy potrzebne są dokładne wskazówki, a kiedy mogą one przeszkadzać?

√ Zadanie 4

Porozmawiaj z uczniami o tym, czy są dziedziny, na których uczniowie świetnie się znają. Może narciarstwo, kolarstwo, modelarstwo, gry – np. „Fortnite", „Minecraft"?

Poproś uczniów o opisanie w 3–4 zdaniach jednej aktywności z ich dziedziny, niech użyją słów, które stosują tylko specjaliści. Rozwieście prace w sali. Poproś uczniów o to, żeby podeszli do kart, przeczytali opisy dziedzin i spisali niejasne słowa. Autorzy prac wyjaśniają to, co nie jest zrozumiałe dla oglądających, zamieniają specjalistyczne nazwy na prostsze. Zwróć uwagę uczniów na świadome używanie języka. Zapytaj, kiedy używanie specjalistycznego języka jest właściwe, a kiedy używanie uproszczonego słownictwa może być niewłaściwe? W starszych klasach możesz wprowadzić pojęcie *socjolekt.*

Wytłumacz uczniom pojęcia stylu wypowiedzi: naukowego i popularnonaukowego.

√ Zadanie 5

Albert Einstein powiedział, że „jeśli nie potrafisz wytłumaczyć czegoś w prosty sposób – to tak naprawdę tego nie rozumiesz".

Wraz z uczniami przyjrzyj się fragmentowi artykułu „Lwowscy wirtuozi..." pod tytułem „Przestrzenie Banacha i introwizor Steinhausa". Zaznaczcie wybranym kolorem najważniejsze informacje – najlepiej pojedyncze słowa, które są słowami-magnesami, to znaczy – wyrażają najważniejszą myśl. Porównajcie swoje wybory.

Spróbujcie opisać własnymi słowami w kilku zdaniach główne myśli dwóch wybranych akapitów w tym fragmencie.

√ Zadanie 6

Matematycy, ale także ci, którzy są bardzo uważni, wiedzą, że drobne różnice zapisu mają duży wpływ na znaczenie komunikatu.

Rozdaj uczniom Kartę Pracy nr 3. Uczniowie szukają różnic w znaczeniu słowa w zależności od jego zapisu. Daj kilka minut na pracę indywidualną. Następnie poproś uczniów o porównanie wniosków. Mogą to zrobić, spacerując po klasie i rozmawiając lub w parach czy trzyosobowych grupach. Poproś o zaznaczenie spostrzeżeń np. symbolami śladów mojego myślenia. Porównajcie wnioski.

√ Zadanie 7

Tytuł jednego z artykułów to aforyzm Hugona Steinhausa. Na początku lekcji dopytaj uczniów, czym jest aforyzm. Poproś uczniów, żeby wypisali wszystkie aforyzmy z tekstu (znajdą je w dwóch ostatnich fragmentach artykułu) i na ich podstawie wskazali cechy wspólne aforyzmów.

- Co oznaczają te słowa?
- Jak powstały takie skojarzenia?
- Co na temat języka – jego znajomości i umiejętności wykorzystania – sądził Hugo Steinhaus?
- Jak podchodził do języka?
- Jakie znaczenie ma dziś język?

Podsumowanie zajęć

- Dlaczego uważność, dbałość o szczegóły jest ważna w komunikacji?
- Jak pomaga w komunikacji umiejętność dobierania właściwych słów?
- Czy pomaga Wam znajomość odbiorcy?
- Jakie znaczenie ma znajomość zasad gramatycznych, ortograficznych języka, w którym się komunikujecie?

Wspólnie zastanówcie się nad odpowiedziami na te pytania.

Po lekcji

Zadanie do wyboru

- Przygotujcie rozwinięcie przeczytanego artykułu. Wyjaśnijcie trzy słowa z tekstu tak, jakby to były linki w Wikipedii np. „skrypt", „Polskie Towarzystwo Matematyczne", „intuicja matematyczna".

* To zadanie możesz zrealizować na lekcji pod warunkiem, że uczniowie mogą skorzystać z telefonów komórkowych lub innych urządzeń.

- Porozmawiajcie ze swoim nauczycielem matematyki/ fizyki/chemii. Gdzie studiował? Jak wspomina swoją edukację? Jak zapamiętał nauczycieli i wykładowców? Jakie zagadnienia z dziedziny, którą studiował, były dla niego najciekawsze albo najtrudniejsze? Co w pracy z wami jest dla niego wyzwaniem? Jakie metody wyjaśniania uważa za najskuteczniejsze? Spróbujcie napisać artykuł o swoim nauczycielu. Postarajcie się, aby nie zabrakło w nim specjalistycznych słów, ale również aby był zrozumiały dla czytelników.

KARTA PRACY NR 1

„Słowa – klucze"

Ziutek

szkoła lwowska

doktor

aforyzm

współzawodnictwo

introwizor

sesja

korepetycje

operacje liniowe

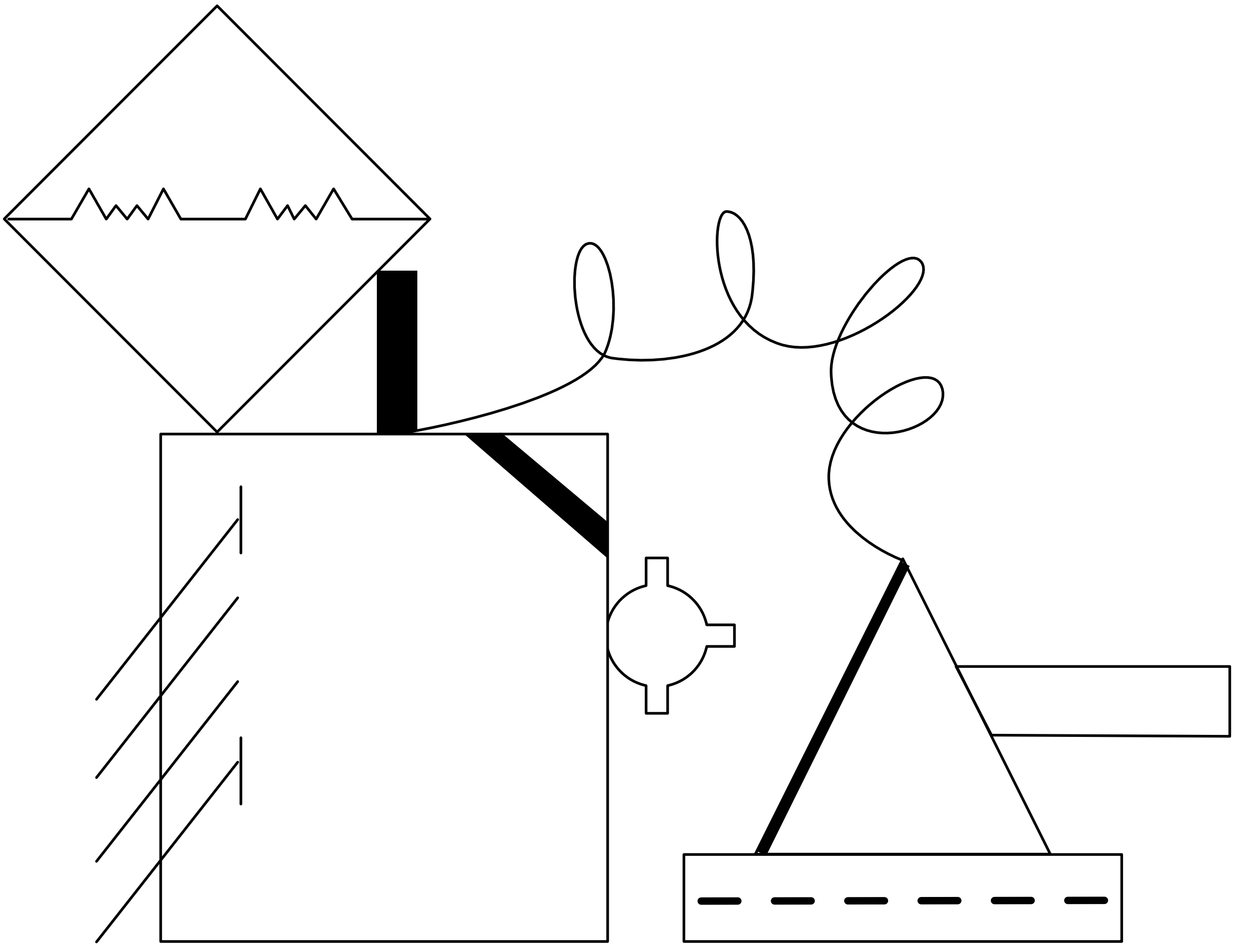
Planty

twierdzenie

problem

„Księga Szkocka"

KARTA PRACY NR 2



KARTA PRACY NR 3

Lp.	Słowo 1	Słowo 2	Moje notatki
1	pisze	piszę	
2	kot	kod	
3	zażądanie	zarządzanie	
4	choć	chodź	
5	jesz	jeż	
6	lud	lut	
7	adoptować	adaptować	
8	efektownie	efektywnie	
9	Hadesa	Hadesu	
10	uchami	uszami	
11	tempo	tępo	
12	bal	bal	
13	1.	1	
14	teorią	teoriom	
15	dopłyną	dopłynął	
16	„Księga Szkocka”	szkocka książka	
17	francuska	Francuzka	
18	Zjedzmy dzieci.	Zjedzmy, dzieci.	
19	Rachunek zastąpił rysunek.		
20	Wynajmę mieszkanie.		
21	Przyszła z pilotem.		
22	Ma tylko jedną komórkę.		

Notatki

Humanistyczne kompetencje matematyków,
czyli jak przenikają się umiejętności z różnych dziedzin

Anna Wójcik-Jachowicz

Poruszane tematy

różne sposoby pracy z tekstem, stereotypy i ich wpływ na postrzeganie ludzi, kompetencje matematyczne (sposób myślenia matematycznego), doskonalenie umiejętności uważnego analizowania tekstu (również pod kątem językowym), doskonalenie umiejętności budowania pytań, dyskutowania, argumentowania, selekcjonowania informacji, doskonalenie umiejętności notowania w różny sposób, twórcza praca z tekstem

123

Wiek uczniów

VI-VIII klasa szkoły podstawowej

Możliwość współpracy z nauczycielami

języka polskiego, pedagogiem

Przedmiot

język polski, elementy do wykorzystania na godzinie wychowawczej

Zarezerwuj czas

minimum 90 minut

Poproś uczniów o przeczytanie

- Bogdan Miś: „Co nam dał genialny Banach", GW, 25.02.2019
- Beata Maciejewska: „Geniusz i już", GW, 01.04.2019
- Mariusz Urbanek: „Lwowscy wirtuozi różniczek i całek", GW, 04.03.2019
- Dodatkowo uczniowie mogą obejrzeć zdjęcia i przeczytać artykuł o odsłonięciu ławeczki Banacha na Plantach w Krakowie.

Przygotuj przed lekcją

- taśmę malarską,
- wydruki Kart Pracy, które zamierzasz wykorzystać,
- karteczki post-it,
- wydruk rozciętych aforyzmów z Karty Pracy nr 5, tyle kopii, ile będzie grup,
- czarne markery,
- opcjonalnie telefony, głosowanie w Mentimeter lub Socrative,
- opcjonalnie czysty zeszyt.

Krótki opis zadania i cele zajęć

Poszerzenie świadomości kompetencji – kompetencje matematyczne, kompetencje osobiste, kompetencje językowe, umiejętność analizy, wnioskowania, poszerzenie wiedzy na temat sposobów uczenia się, doskonalenie umiejętności dyskutowania, rozumienia tekstu.

Opis zajęć

Przed zajęciami

Prowadzisz te zajęcia metodą odwróconej lekcji, dlatego przed rozpoczęciem działań porozmawiaj z uczniami o sposobach aktywnego czytania.

W czasie lekcji

Wersja 1

√ **Ćwiczenie**

Możesz zaproponować uczniom krótką zabawę, która pokaże, jak stereotypowo postrzegani są matematycy i humaniści. Przyklej na podłodze taśmę malarską, dzieląc salę na pół. Wytłumacz, że po jednej stronie znajduje się przestrzeń dla humanistów, po drugiej dla uczniów, którzy wolą przedmioty ścisłe. Poproś uczniów o zajęcie miejsca po tej stronie, po której czują się lepiej. Następnie podziel przestrzenie jeszcze jedną linią – w poprzek, dzieląc na pół przestrzeń „humanistyczną" i „matematyczną". Poproś, żeby podzielili się wg tego, czy wolą literaturę czy gramatykę, czy wolą literaturę czy sztuki plastyczne, a może media lub historię? Po stronie matematyków: np. algebrę czy geometrię? Dopytuj, jakich kompetencji i umiejętności potrzebują, żeby być coraz lepszymi w swoich ulubionych dziedzinach. Podziały można mnożyć. Twoim celem jest pokazać, że jeśli uczeń myśli, że jest humanistą, a bliżej mu do sfery artystycznej – to blisko mu również do myślenia przestrzennego i geometrii. Początek tego ćwiczenia możecie powtórzyć po skończonym warsztacie. Może więcej osób ustawi się bliżej środka przestrzeni?

Wersja 2

√ **Ćwiczenie**

Mity na temat matematyków. Przedstaw uczniom stwierdzenia na temat matematyków. Znajdziesz je na Karcie pracy nr 2. Uczniowie głosują, które stwierdzenie uważają za prawdziwe, a z którymi się nie zgadzają. Do tego działania możecie wykorzystać aplikację Mentimeter. Po założeniu konta tworzy się slajd z pytaniem, który wyświetlamy podczas lekcji. Uczniowie, korzystają ze swoich telefonów lub tabletów i oddają głosy. Możecie również skorzystać z aplikacji Socrative, która działa podobnie jak Mentimeter – również od razu pojawia się wizualizacja wyników. Możecie zapisać twierdzenia na tablicy, głosować za pomocą kresek, podniesienia rąk itp. Ważne jest, abyście utrwalili wyniki. Dzięki temu będziecie mogli wrócić do nich po warsztacie.

Wersja 3

√ Ćwiczenie

Pokaż uczniom fotografię ławki Banacha, która znajduje się w Krakowie. Link znajdziesz w załączniku. Porozmawiajcie chwilę o tym, co jest na fotografii. Kiedy, dla kogo i w jakich miejscach stawia się uliczne rzeźby? Kim byli mężczyźni przedstawieni na rzeźbie? Lekcję właściwą możesz zacząć od wyjaśnienia idei wykonania ławki.

√ Zadanie 1

Wyświetl zdjęcie ławki Banacha. Poproś uczniów, aby wyjaśnili ideę tego projektu. Uczniowie wiedzą to po przeczytaniu artykułu. Przyjrzyjcie się napisom na ławce. Zapytaj, co właściwie upamiętniono przez stworzenie ławki Banacha?

Jeśli wcześniej nie przeprowadzaliście ćwiczenia z przestrzenią na podłodze, możecie zrobić je teraz.

√ Zadanie 2

Poproś uczniów o to, by określili, na czym polega typowa praca matematyka? Poza odpowiedzią „na liczeniu", spróbujcie pogłębić temat. Na szukaniu dowodów i udowadnianiu. Na prowadzeniu logicznego wywodu. Na zbieraniu danych, porównywaniu, łączeniu w zbiory, sprowadzaniu do wspólnego mianownika. Poprowadź uczniów w taki sposób, żeby stworzyć listę czynności, na których oparte są zajęcia. Wskaż, że matematycy często rozwiązują problemy matematyczne, szukają, wskazują niewiadome, żeby wiedzieć, co jest do udowodnienia, znalezienia. Poproś uczniów, aby wskazali w tekście słowa, które wymagają wyjaśnienia. Omówcie te słowa.

√ Zadanie 3

Rozmowa w parach. Uczniowie dzielą się spostrzeżeniami po przeczytaniu tekstu. Wykorzystują metodę śladów twojego myślenia.

√ Zadanie 4

W poprzednim zadaniu uczniowie podzielili się swoimi spostrzeżeniami dotyczącymi tekstu. Poproś ich o zapisanie na osobnych post-itach co najmniej 3 pytań związanych z tekstem, zaczynających się od „dlaczego"? Kartki z pytaniami przypnijcie do tablicy. Następnie każdy uczeń podchodzi do tablicy i wybiera jedną kartkę. Uczniowie udzielają odpowiedzi na wybrane przez siebie pytania. Dopytuj o uzasadnienie, o tok myślenia, o dowody potwierdzające. Pozostałe na tablicy pytania możecie wyjaśnić wspólnie lub zostawić na koniec lekcji. Możecie również, jak użytkownicy „Księgi Szkockiej", zostawić je nawet na kolejną lekcję.

√ Zadanie 5

W matematyce każdy minus i przecinek mają znaczenie. Drobna pomyłka może prowadzić do zupełnie błędnych wniosków. Sprawdźcie, czy tę matematyczną zasadę możecie wykorzystać, kiedy pracujecie z tekstem?

Przygotuj fragmenty artykułów z Karty Pracy nr 3c i poproś uczniów o wylosowanie po jednym fragmencie. Wyjaśnij, że tekst różni się kilkoma szczegółami od oryginalnego artykułu albo zapisz na odwrocie kartek, ile jest różnic. Informacje na ten temat znajdziesz na Karcie Pracy 3b. Poproś uczniów, aby porównali z oryginałem fragmenty, które otrzymali i znaleźli błędy. Błędy mogą dotyczyć zarówno zapisu, jak i informacji lub jej braku w tekście. Uczniowie mogą najpierw podać liczbę i sprawdzić, czy w drugim fragmencie są te same informacje. Potem ewentualnie uzupełnić i sprawdzić, porównując z oryginałem. Oryginalny tekst znajdziecie na Karcie Pracy nr 3a.

√ Zadanie 6

Dlaczego Józef Marcinkiewicz często bywał poirytowany w czasie wykładów? Powodem było to, że chciał wyjaśnić te same zagadnienia, ale inaczej niż wykładowca, w uproszczonej wersji.

Wybierzcie jeden z akapitów tekstu. Poproś uczniów o to, by policzyli słowa. W pierwszej części zadania skróćcie tekst – zmniejszcie liczbę wyrazów o połowę. W drugiej części zadania – podzielcie tę liczbę jeszcze na połowę. Odczytajcie teksty. Co dzieje się z tekstem, z którego usuniemy część wyrazów? Co zyskuje? Co może stracić?

√ Zadanie 7

Wersja 1

Obejrzyjcie wzór depeszy z czasów wojny oraz telegramu z 1982 r. (znajdziecie je w internecie). Jakim językiem napisane są te teksty? Wybierzcie wydarzenie z życia bohaterów artykułów i poinformujcie o nim za pomocą telegramu lub nieco dłuższej depeszy.

Wersja 2

Przygotuj wydarzenia na paskach papieru. Po omówieniu cech depeszy uczniowie losują jedno z wydarzeń i piszą o nim w parach. Dzięki temu unikniecie powtórzeń tych samych informacji.

Jeśli uczniowie będą chcieli podjąć pracę dodatkową, te materiały posłużą Wam do stworzenia tablicy z informacjami o matematykach, ich życiu i zawodowych osiągnięciach. Możecie dobrać papier przypominający depeszę z czasów współczesnych matematykom ze szkoły lwowskiej.

√ Zadanie 8

Przypomnijcie sobie wnioski z ćwiczenia dotyczącego stereotypowych cech matematyków. Indywidualiści, aspołeczni, żyjący w świecie teorii niezrozumiałych dla przeciętnego człowieka, monotematyczni, ekscentryczni.

Przedyskutujcie temat w grupach. Następnie poproś uczniów o przedstawienie dowodów na to, że wiele z tych twierdzeń to mity, nieprawdziwe informacje, wnioski oparte na częściowych informacjach.

Wśród dowodów obalających stereotypy powinny pojawić się informacje biograficzne. Warto zwrócić uwagę na zainteresowania bohaterów, ich wybory życiowych, reakcje na rzeczywistość wojenną, spotkania w kawiarni Szkocka, stosunek do wyróżnień, tytułów, pieniędzy itd.

√ Zadanie 9

W trakcie omawiania artykułów, zapoznając uczniów z różnymi typami notowania, możesz nawiązać do metody stacji zadaniowych. Na dużym arkuszu papieru wyciętym w kształcie koła umieść zadania. Uczniowie będą rozwiązywać zadania, przesuwając się do kolejnych problematów. Możecie wyznaczyć konkretny czas na zadanie. Gdy czas minie, uczestnicy przechodzą do następnego zadania. Każda kolejna osoba może zaakceptować rozwiązanie poprzednika, rozwinąć je albo zaproponować inne. Wasz okrągły stolik może być jeden, ale może też być ich kilka – na wzór stolików w kawiarni.

Zadania dobierz do poziomu i do liczebności grupy. Dobrze, żeby nie były zbyt łatwe do rozwiązania, najlepiej wybierz zadania dwuczęściowe – oparte na tekście lub zagadnieniach matematycznych. Możesz poprosić o pomoc matematyka.

Na zakończenie zadania omówcie wyniki pracy. Jeśli jakieś zadanie pozostało bez odpowiedzi, możecie wyjaśnić je wspólnie lub zostawić otwarte np. do następnej lekcji, jak w „Księdze Szkockiej".

Problemat 3

Czyje to słowa: „Odkrycie Banacha to mój największy sukces w matematyce?" Podaj numer akapitu, w któtym znalazłeś potwierdzenie:

A) Banacha

B) Steinhausa

C) Ulama

D) Marcinkiewicza

Problemat 5

Ile lat przed wybuchem wojny Banach opublikował „Teorię operacji liniowych"?

A) 3

B) 7

C) 2

D) w roku wybuchu wojny

√ Zadanie 10

Obaliliście już niektóre mity dotyczące matematyków. Z tekstów wyłania się obraz ludzi, którzy mają wiele umiejętności oraz energię do różnorodnych działań.

Przedstaw uczniom listę wybranych kompetencji z czterech obszarów kompetencji kluczowych. Poproś, żeby wybrali te, które dostrzegają u poznanych bohaterów. Listę możesz przedstawić w takiej kolejności, jak na Karcie Pracy nr 4 albo dowolnie je przemieszać. Pokaż później uczniom, do jakiego obszaru należą. W wyniku określania kompetencji bohaterów, uczniowie powinni dostrzec, że wiele ich umiejętności nie jest typowo matematycznych. Istotnym elementem zadania jest to, aby uczniowie uzasadnili wybór kompetencji bohatera przykładami z tekstów.

* Możecie stworzyć otwartą przestrzeń. Na arkuszach papieru zawieszonych na ścianie w sali napiszcie trzy/cztery problemowe tematy. Uczniowie mogą podchodzić do dowolnych arkuszy i włączać się w dyskusję. Mogą tylko słuchać, mogą aktywnie tworzyć, mogą zostać tak długo, jak chcą. To zadanie możesz wykorzystać podczas rozmowy o kompetencjach.

√ Zadanie 11

Stefan Banach i Hugo Steinhaus byli sobie bardzo bliscy, mimo że znacznie się różnili. Spędzali czas i pracowali zupełnie inaczej.

Obejrzyjcie opracowaną przez naukowców z Uniwersytetu Stanforda listę sprawdzonych sposobów uczenia się. Znajdziecie ją na Karcie Pracy nr 1. Po przeczytaniu artykułu wskażcie sposoby, które możecie zaobserwować w pracy Banacha i innych matematyków opisanych w tekście.

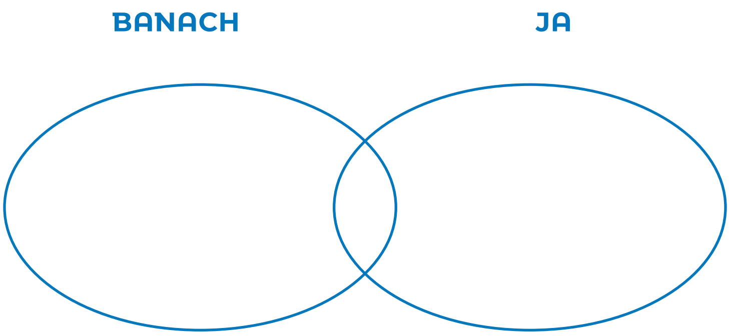
Wskazówka dla prowadzącego

Uczniowie powinni wskazać, że matematycy rozmawiali i milczeli, czyli dawali sobie czas na wspólną pracę w ciszy. Pisali w bardzo różny sposób i w różnych miejscach. Czytali nie tylko informacje związane z matematyką. Odnosili się do dokonań innych. Marcinkiewicz mógł proponować nowe rozwiązania, ponieważ znał wcześniejsze. Dzięki temu miał do czego się odnieść. Banach mówił głośno, jakby sam do siebie, a jego monologi były spisywane przez asystenta.

√ Zadanie 12

Matematycy często tworzą zbiory, szukają części wspólnych i cech różniących dane. Zaproponuj uczniom pracę na zbiorach z informacjami. Poszukajcie sposobów pracy/uczenia się, podobnych u Was i u wybranego matematyka oraz takich, które zdecydowanie was różnią.

Oceńcie te sposoby. Które i dlaczego stosujecie? Które uznalibyście za wartościowe i możliwe do wprowadzenia w waszej pracy?



√ Zadanie 13

Poproś uczniów, aby przyjrzeli się tytułowi artykułu o J. Marcinkiewiczu. Jak podejrzewacie – dlaczego tak brzmi? Odpowiedź znajdziecie w artykule „Lwowscy wirtuozi…”. Poproś uczniów o wskazanie innych aforyzmów Steinhausa wykorzystanych w artykule.

Podziel uczniów na grupy. Rozłóż przed każdą grupą kopertę z wybranymi przez siebie aforyzmami Steinhausa, wyciętymi z Karty pracy nr 5.

Poproś uczniów o przeczytanie tekstów i ułożenie ich według przyjętej przez siebie reguły – ze względu na temat, budowę, skojarzenie itp. Porozmawiajcie o tym, co zaproponowali uczniowie, czym kierowali się w wyborze zasady porządkowania cytatów. Który z aforyzmów spodobał im się najbardziej, który ich rozbawił, a który zaskoczył?

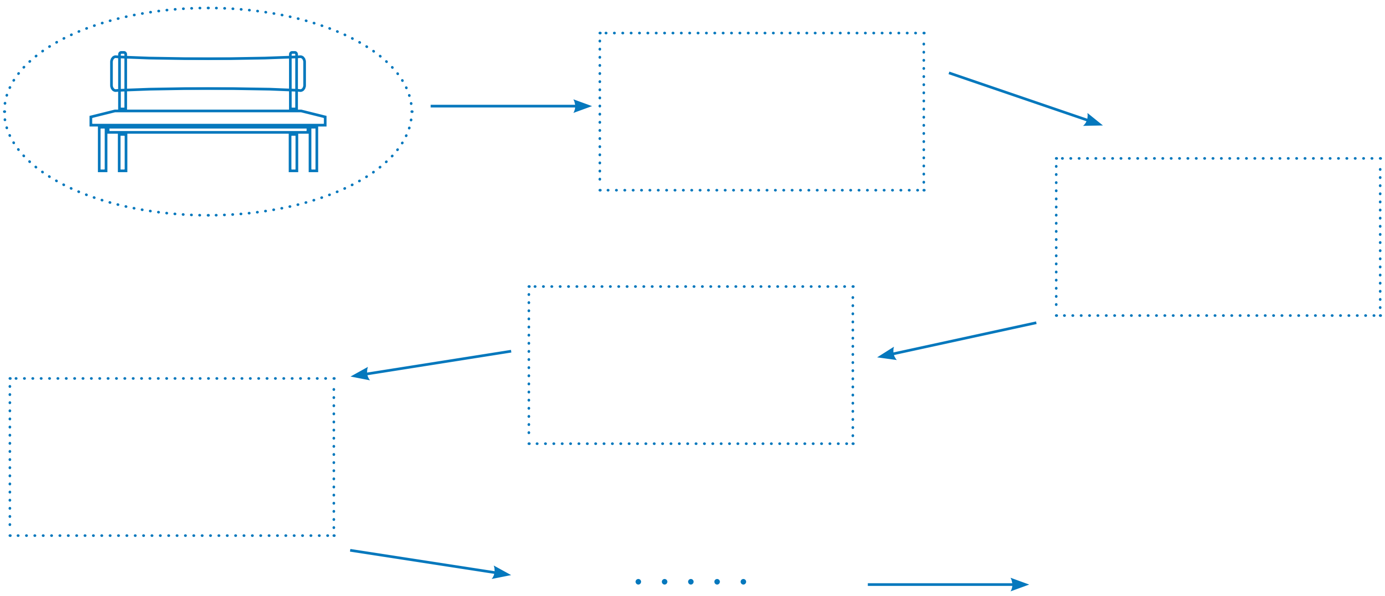
Steinhaus był wybitnym matematykiem, a jednocześnie bardzo wysoko cenił język. Potrafił w gąszczu słów dostrzec kilka takich, które po połączeniu zyskiwały nowe sensy. Podobny sposób myślenia i działania reprezentował Stefan Banach w matematyce.

Wybierzcie dowolny fragment artykułu. Znajdźcie w nim słowa, które rozmieszczone są w różnych częściach całego tekstu. Spróbujcie znaleźć między nimi połączenia, nadać im nowy sens. Weźcie markery i wykreślcie słowa, które odrzuciliście. Nowo powstałe teksty – „wiersze", stworzone z połączenia wybranych przez was słów, zawieście w Waszej sali.

Możecie wykorzystać metodę losową. Korzystając z kostek do gry wylosujcie najpierw numer akapitu, potem numer wersu i wreszcie liczbę kolejnego słowa, dopuszczając np. przesunięcie o jedno w tył lub w przód.

√ Zadanie 14

Steinhaus był dla Banacha kimś w rodzaju mentora – pomagał mu, dbał o jego rozwój, mimo że samemu Banachowi na tym nie zależało. Rozrysuj drogę Banacha od spotkania ze Steinhausem na ławce w Krakowie do jego doktoratu. Jakie czynniki na to wpłynęły? Jaki był udział Steinhausa w historii Stefana Banacha?



Podsumowanie zajęć

- Jaki obraz matematyków wyłania się z tekstu i po warsztatach?
- Jak toczyło się ich życie?
- Czy podział umiejętności na humanistyczne i ścisłe jest precyzyjny?

Po lekcji

√ Zadanie dodatkowe

- Żona Banacha kupiła zeszyt, w którym bywalcy kawiarni Szkocka spisywali rozwiązania problemów matematycznych. Może założycie taki sam w klasie? Będziecie mogli wpisywać do niego nie tylko wątpliwości związane z konkretnym przedmiotem, ale również spostrzeżenia, informacje o ważnych klasowych wydarzeniach. To będzie wasza „Księga Szkocka".
- Zastanówcie się nad swoją nauką, rozwojem, edukacją... Czy są wokół Was osoby, na których wsparcie możecie liczyć? Kto to jest? W jaki sposób pomaga Wam się rozwijać? Może Ty możesz być dla kogoś „Steinhausem"?
- Jeden z aforyzmów Steinhausa mówi o tym, że geniusz to człowiek, który ma szczególne predyspozycje, talent i wrodzone kompetencje, które nie dają się zastąpić pracą i nauką. Zgadzasz się z tym stanowiskiem? Napisz esej na ten temat.
- Możesz zaproponować uczniom również „cichą dyskusję". Powieście w klasie czysty arkusz papieru. Na górze zapiszcie główny problem, który chcecie przedyskutować. Uczniowie mogą w każdej chwili podchodzić i dopisywać swoje propozycje, pytania, wątpliwości, komentarze. Arkusz może wisieć np. przez tydzień. Po upływie tego czasu przyjrzyjcie się wynikom.

Dodatkowe materiały i linki

Artykuł: **„Ławeczka Banacha i Nikodyma, opracowanie redakcyjne"**, Wrocławski Portal Matematyczny, matematyka.wroc.pl, dostęp: 10.01.2020 r.

Artykuł: K. S. Morawski: **„Stefan Banach piękny umysł po polsku"**, opinie.wp.pl, dostęp: 10.01.2020 r.

Artykuł: M. Dworniczak: **„Zeszyt za 2,50"**, GOŚĆ.pl, dostęp: 10.01.2020 r.

Demotywatory

„Księga Szkocka"
Artykuł: **„Co i gdzie jeść we Lwowie? Kawiarnia Szkocka – Szewczenki 27"**, kawiarniany.pl, dostęp: 10.01.2020 r.

Dla starszych, dla nauczyciela

Artykuł: M. Napiórkowski: **„Humanista=inżynier od ludzi. Pomoże Ci zaprojektować lepsza aplikację, firmę, budynek..."**, mitologiawspółczesna.pl, dostęp: 10.01.2020 r.

Artykuł: A.Kozdęba: **„10 najlepszych sucharów Hugona Steinhausa"**, jamowie.to, dostęp: 10.01.2020 r.

KARTA PRACY NR 1

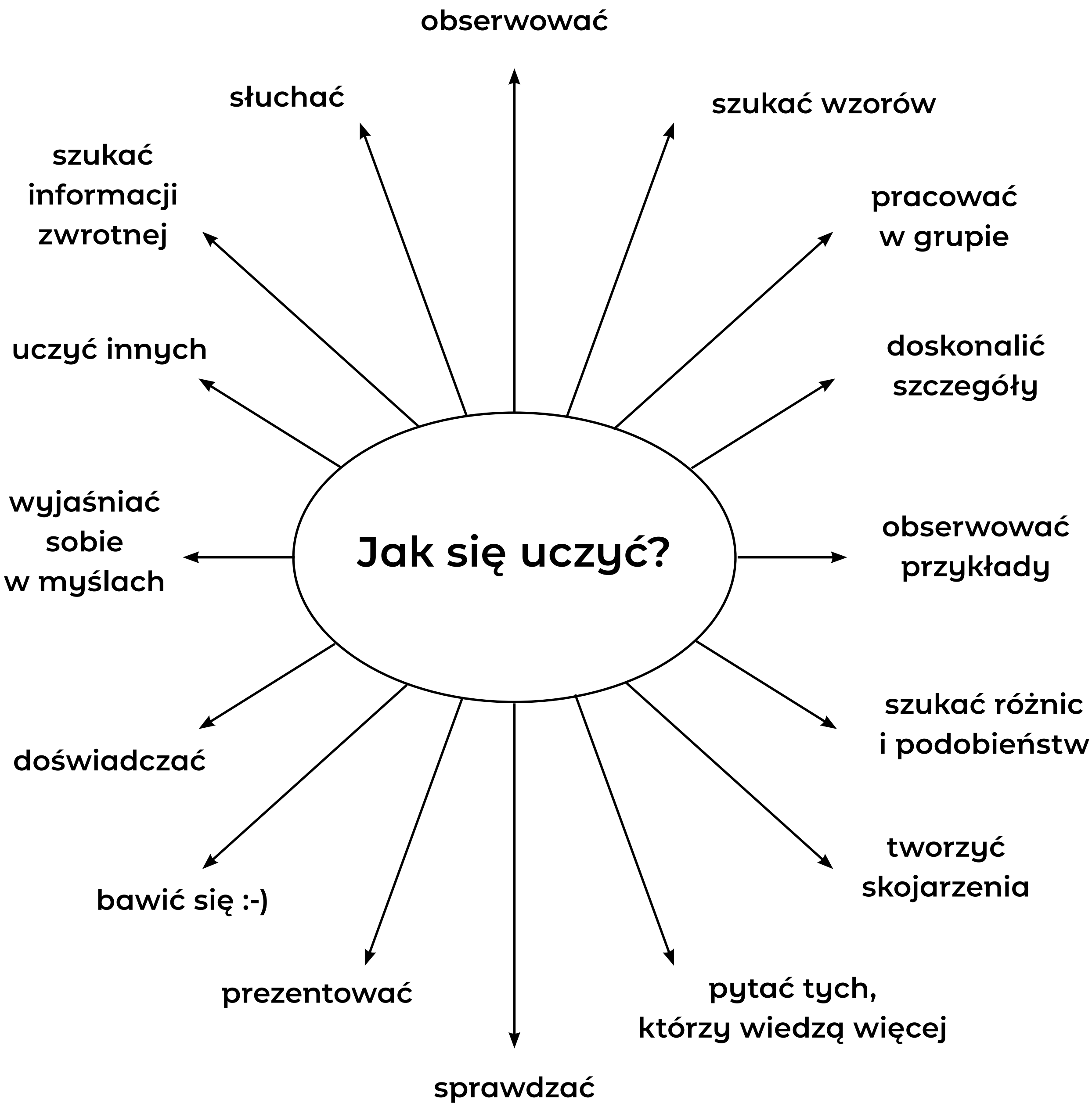
„Mechanizmy uczenia się”

materiał dla prowadzącego, do wykorzystania ze starszymi uczniami

- **Obserwacja i naśladowanie:** kiedy mamy możliwość obserwować modelowe wykonanie i powtarzać je;
- **Doświadczenie:** wykorzystanie inteligencji ciała – aktywne działania sprzyjają utrwalaniu;
- **Modelowe przykłady:** obserwacja klasycznego wykonania jakiegoś procesu, eksperckiego, bez dygresji, z komentarzem dotyczącym konkretnego działania;
- **Zamierzone ćwiczenie:** wysiłek przeznaczony na doskonalenie konkretnego działania, które jest elementem jakiejś większej całości (na przykład ćwiczenie zagrywki jako elementu gry w siatkówkę);
- **Elaboracja:** łączenie nowej wiedzy z już posiadaną;
- **Wizualizacja:** wymyślanie struktury (wyobrażenia); uczenie się z wykorzystaniem schematów, rysunków, szkiców (minusem jest przywiązywanie się do jednego wyobrażenia jednego modelu);
- **Generowanie:** tworzenie skojarzeń, odnośników, łączenie w pary, przetwarzanie;
- **Analogie:** wyszukiwanie ogólnych zasad, porównywanie z innymi przykładami;
- **Szukanie kontrastów:** wychwytywanie kluczowych informacji różniących, metoda dobra także w różnicowaniu większej ilości przykładów w obrębie danego zagadnienia tak, aby móc wyszukać nawet drobne szczegóły;
- **Formułowanie pytań:** metoda obejmująca zarówno zadawanie pytań przez ucznia, jak i umiejętne stawianie pytań przez prowadzącego, trenera, mentora (trener obok uczącego się zamiast mędrca za pulpitem);
- **Odwracanie błędnych przekonań:** weryfikacja hipotez, poddawanie w wątpliwość, spoglądanie z innej strony;
- **Tworzenie efektu**: powodowanie, żeby proces nauki skończył się konkretnym efektem;
- **Zabawa:** wywoływanie pozytywnych emocji podczas nauki, a także uczenie się „mimochodem” przez zabawę;
- **Uczenie się przez doświadczenie:** rozpoczynanie pracy od doświadczenia, nawet łączącego się z popełnieniem błędu, aby na tej podstawie wyprowadzić wnioski i poznać teorię. W tej sytuacji ważne jest wyjaśnienie we właściwym momencie, aby nie pozostawić ucznia bez wsparcia;
- **Samowyjaśnianie:** mówienie w myślach, mówienie własnymi słowami;
- **Właściwe nastawienie:** przyzwolenie samemu sobie na proces – odroczenie nagrody w czasie, gotowość do popełniania błędów, wiara w to, że potrafię, nastawienie na rozwój (prof. C. Dweck);
- **Uczenie innych:** wyjaśnianie innym, tłumaczenie, odpowiadanie na pytania itp. Pozwala przechodzić proces wielokrotnie;
- **Praca w grupie:** możliwość współdziałania, interakcja społeczna;
- **Informacja zwrotna:** możliwości otrzymania informacji zwrotnej z różnych źródeł;
- **Nagroda:** łączenie uczenia się z nagrodą, niekoniecznie oceną;
- **Słuchanie:** wymiana pomysłów niewiążąca się z dyskusją i zbijaniem argumentów strony przeciwnej (choć jest to jedna z możliwości), przyjmowanie perspektywy innych osób;
- **Uczestniczenie w procesie:** poczucie przynależności do grupy, do zespołu, do drużyny, do klasy, do społeczności, która znajduje się na tym samym etapie, pracuje nad tym samym zagadnieniem.

KARTA PRACY NR 1

„Mechanizmy uczenia się"
wersja do wydruku dla młodszych uczniów



KARTA PRACY NR 2

Teza	Prawdziwa	Fałszywa
Matematycy to indywidualiści, pracują zwykle sami.		
Matematycy lubią pracę w ciszy.		
Matematycy są „oderwani od rzeczywistości”, żyją w świecie teorii.		
Matematyk dogada się tylko z matematykiem.		
Pomyślałbyś: matematyk – kujon? bystrzak?		
Matematycy to ludzie bardzo towarzyscy, którzy lubią imprezy.		
Z matematykiem można porozmawiać o poezji.		
Matematycy nie potrafią myśleć metaforycznie.		

KARTA PRACY NR 3A

tekst oryginalny

Tekst oryginalny – poprawny, do porównania dla uczniów, którzy nie mają przy sobie wydruku artykułu	**Moje notatki**
Na marginesie – zupełnie niezależnie od Banacha na całkiem podobny pomysł wpadł Amerykanin Norbert Wiener (zwany „ojcem cybernetyki”). Ale pierwszą w historii monografią, w której te przestrzenie zostały porządnie opisane, jest słynna „Teoria operacji liniowych” Banacha z 1932 r. Zwróćmy uwagę: niemal dokładnie 300 lat po dziele Kartezjusza. W momencie wydania tej książki nie tylko zaczyna się historia zupełnie nowej dyscypliny matematycznej, zwanej dziś analizą funkcjonalną, ale także – jak właśnie w wypadku rewolucji Kartezjusza – mamy do czynienia ze zmianą paradygmatu i powstaniem całkiem nowego spojrzenia na matematykę.	
Matematyka była kiedyś – jak czytałem w jakiejś starej encyklopedii – nauką „o liczbach i figurach”. Dzieliła się na geometrię i rozmaite rachunki – arytmetykę i algebrę. Do XVII wieku. Wtedy pojawiła się zupełnie nowa koncepcja. Jej autorami byli głównie dwaj uczeni francuscy: prawnik i lingwista Pierre de Fermat (ten od najsłynniejszego chyba w historii wielkiego twierdzenia, udowodnionego dopiero pod koniec ubiegłego stulecia) i wielki filozof Rene Descartes, zwany Kartezjuszem. Ten drugi opisał tę koncepcję w 1637 r. i dlatego on jest dziś głównie kojarzony z nowym podejściem, które od jego nazwiska zwane jest rewolucją kartezjańską.	
Twierdzenia i pojęcia geometrii mają zatem odpowiedniki nie tylko w kartezjańskim świecie liczb, ale też w banachowskim świecie funkcji. I na odwrót. I choć owa jedność przedmiotu badań jest z pewnością doniosła filozoficznie, to ważniejsze chyba jest to, że znając, powiedzmy, głęboko geometrię, mamy prawo pytać: jak to, czy inne jej twierdzenie, tłumaczy się na język funkcji? Czym np. byłby w świecie przestrzeni Banacha układ współrzędnych? Jak określić dla funkcji pojęcie, dajmy na to, prostopadłości? I najważniejsze: czy w ten sposób postępując i szukając analogii w dobrze nam już znanej dziedzinie – dowiadujemy się czegoś nowego w dziedzinie nowej? A jeszcze ważniejsze: czy badając świat matematyczny na tak wysokim poziomie abstrakcji jak przestrzenie Banacha, dowiadujemy się w ogóle czegoś istotnego i nowego? Czegoś, co nam nigdy nie przyszło do głowy? Odpowiedź na te wszystkie pytania okazała się pozytywna.	

KARTA PRACY NR 3A

tekst oryginalny

Steinhaus był starszy tylko o 5 lat. Pochodził z bardzo bogatej żydowskiej rodziny kupców z Jasła, stryj posłował do austriackiego parlamentu. W komunistycznej Polsce w ankietach personalnych w rubryce pochodzenie pisał “arystokracja plus burżuazja”. Rozpoczęte we Lwowie studia kontynuował na Uniwersytecie w Getyndze, który był na przełomie XIX i XX wieku matematyczną mekką. Doktorat napisał u jednego z największych ówcześnie matematyków Dawida Hilberta.	
Lwowska szkoła matematyczna narodziła się w Krakowie na Plantach w miejscu, gdzie w 2016 r. ustawiono ławeczkę z pogrążonym w rozmowie Stefanem Banachem i Ottonem Nikodymem. 100 lat wcześniej, letnim wieczorem 1916 r., Nikodym, absolwent matematyki na Uniwersytecie Lwowskim, i Banach, pracownik kolei po dwóch latach Politechniki Lwowskiej, rozmawiali o całce Lebesgue’a. Rozmowę usłyszał Hugo Steinhaus, matematyk po doktoracie na Uniwersytecie w Getyndze, który w Krakowie pracował w Centrali Odbudowy Kraju, ponieważ chciał uniknąć wojska. Twierdzenie Lebesgue’a rozumieli tylko wtajemniczeni, więc zaintrygowany, kto w środku lata rozmawia o matematyce, podszedł. Tak poznał Banacha.	
Banach prowadził życie, na które lwowska profesura patrzyła krzywo. W odróżnieniu od Steinhausa nie przestrzegał profesorskiego dress code’u, pojawiał się publicznie bez marynarki i krawata, za to w koszuli z krótkim rękawem, od opery wolał filmy kowbojskie i nie cierpiał oficjalnych posiedzeń. „Wiem, gdzie nie będę” mówił, otrzymawszy kolejne zaproszenie. „Akcentował swoje pochodzenie góralskie i miał dość lekceważący stosunek do typu ogólnie wykształconego inteligenta bez teki – pisał Steinhaus. – „Przez całe życie zachował pewne cechy krakowskiego andrusa.”	
Dziekan Wydziału Matematyki Uniwersytetu Jana Kazimierza, prof. Stanisław Ruziewicz, polecił jednemu z asystentów chodzić za doktorantem nawet do knajpy i notować wszystko, co mówi. Banach myślał i wyrzucał z siebie matematyczne twierdzenia szybciej niż mógł je zanotować, twierdzili jego współpracownicy. „Miał on jasność myślenia, którą Kazimierz Bartel nazwał raz aż nieprzyjemną” – napisał Steinhaus. Banach tylko zaakceptował notatki. Tak powstała rozprawa „O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych”. Do jej obrony też zmuszono go podstępem. „Jest tu kilku panów z Warszawy, którzy chcieliby przedyskutować pewien problem matematyczny” powiedział mu dziekan. Dyskusja okazała się publiczną obroną. W 1922 r. doktorat Banacha opublikowano po francusku. „Ta data jest datą przełomową w historii matematyki” – napisał jego uczeń prof. Stanisław Mazur.	

KARTA PRACY NR 3B

materiał dla nauczyciela

Tekst oryginalny ze wskazaniem błędów	Moje notatki
Na marginesie – zupełnie niezależnie od Banacha na całkiem podobny pomysł wpadł Amerykanin Norbert Wiener (zwany „ojcem cybernetyki"). Ale pierwszą w historii monografią, w której te przestrzenie zostały porządnie opisane, jest słynna „Teoria operacji liniowych" Banacha z 1932 r. Zwróćmy uwagę: niemal dokładnie 300 lat po dziele Kartezjusza. W momencie wydania tej książki nie tylko zaczyna się historia zupełnie nowej dyscypliny matematycznej, zwanej dziś analizą funkcjonalną, ale także – jak właśnie w wypadku rewolucji Kartezjusza – mamy do czynienia ze zmianą paradygmatu i powstaniem całkiem nowego spojrzenia na matematykę.	
Matematyka była kiedyś – jak czytałem w jakiejś starej encyklopedii – nauką „o liczbach i figurach". Dzieliła się na geometrię i rozmaite rachunki – arytmetykę i algebrę. Do XVII wieku. Wtedy pojawiła się zupełnie nowa koncepcja. Jej autorami byli głównie dwaj uczeni francuscy: prawnik i lingwista Pierre de Fermat (ten od najsłynniejszego chyba w historii wielkiego twierdzenia, udowodnionego dopiero pod koniec ubiegłego stulecia) i wielki filozof Rene Descartes, zwany Kartezjuszem. Ten drugi opisał tę koncepcję w 1637 r. i dlatego on jest dziś głównie kojarzony z nowym podejściem, które od jego nazwiska zwane jest rewolucją kartezjańską.	
Twierdzenia i pojęcia geometrii mają zatem odpowiedniki nie tylko w kartezjańskim świecie liczb, ale też w banachowskim świecie funkcji. I na odwrót. I choć owa jedność przedmiotu badań jest z pewnością doniosła filozoficznie, to ważniejsze chyba jest to, że znając, powiedzmy, głęboko geometrię, mamy prawo pytać: jak to, czy inne jej twierdzenie, tłumaczy się na język funkcji? Czym np. byłby w świecie przestrzeni Banacha układ współrzędnych? Jak określić dla funkcji pojęcie, dajmy na to, prostopadłości? I najważniejsze: czy w ten sposób postępując i szukając analogii w dobrze nam już znanej dziedzinie – dowiadujemy się czegoś nowego w dziedzinie nowej? A jeszcze ważniejsze: czy badając świat matematyczny na tak wysokim poziomie abstrakcji jak przestrzenie Banacha, dowiadujemy się w ogóle czegoś istotnego i nowego? Czegoś, co nam nigdy nie przyszło do głowy? Odpowiedź na te wszystkie pytania okazała się pozytywna.	

KARTA PRACY NR 3B

materiał dla nauczyciela

Steinhaus był starszy tylko o 5 lat. Pochodził z bardzo bogatej żydowskiej rodziny kupców z Jasła, stryj posłował do austriackiego parlamentu. W komunistycznej Polsce w ankietach personalnych w rubryce pochodzenie pisał "arystokracja plus burżuazja". Rozpoczęte we Lwowie studia kontynuował na Uniwersytecie w Getyndze, który był na przełomie XIX i XX wieku matematyczną mekką. Doktorat napisał u jednego z największych ówcześnie matematyków Dawida Hilberta.	
Lwowska szkoła matematyczna narodziła się w Krakowie na Plantach w miejscu, gdzie w 2016 r. ustawiono ławeczkę z pogrążonym w rozmowie Stefanem Banachem i Ottonem Nikodymem. 100 lat wcześniej, letnim wieczorem 1916 r., Nikodym, absolwent matematyki na Uniwersytecie Lwowskim, i Banach, pracownik kolei po dwóch latach Politechniki Lwowskiej, rozmawiali o całce Lebesgue'a. Rozmowę usłyszał Hugo Steinhaus, matematyk po doktoracie na Uniwersytecie w Getyndze, który w Krakowie pracował w Centrali Odbudowy Kraju, ponieważ chciał uniknąć wojska. Twierdzenie Lebesgue'a rozumieli tylko wtajemniczeni, więc zaintrygowany, kto w środku lata rozmawia o matematyce, podszedł. Tak poznał Banacha.	
Banach prowadził życie, na które lwowska profesura patrzyła krzywo. W odróżnieniu od Steinhausa nie przestrzegał profesorskiego dress code'u, pojawiał się publicznie bez marynarki i krawata, za to w koszuli z krótkim rękawem, od opery wolał filmy kowbojskie i nie cierpiał oficjalnych posiedzeń. „Wiem, gdzie nie będę" mówił, otrzymawszy kolejne zaproszenie. „Akcentował swoje pochodzenie góralskie i miał dość lekceważący stosunek do typu ogólnie wykształconego inteligenta bez teki" – pisał Steinhaus. – „Przez całe życie zachował pewne cechy krakowskiego andrusa."	
Dziekan Wydziału Matematyki Uniwersytetu Jana Kazimierza, prof. Stanisław Ruziewicz, polecił jednemu z asystentów chodzić za doktorantem nawet do knajpy i notować wszystko, co mówi. Banach myślał i wyrzucał z siebie matematyczne twierdzenia szybciej niż mógł je zanotować, twierdzili jego współpracownicy. „Miał on jasność myślenia, którą Kazimierz Bartel nazwał raz aż nieprzyjemną" – napisał Steinhaus. Banach tylko zaakceptował notatki. Tak powstała rozprawa „O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych". Do jej obrony też zmuszono go podstępem. „Jest tu kilku panów z Warszawy, którzy chcieliby przedyskutować pewien problem matematyczny" – powiedział mu dziekan. Dyskusja okazała się publiczną obroną. W 1922 r. doktorat Banacha opublikowano po francusku. „Ta data jest datą przełomową w historii matematyki" – napisał jego uczeń prof. Stanisław Mazur.	

KARTA PRACY NR 3C

materiał dla uczniów do wydrukowania, ze wskazaniem liczby różnic, jeśli nauczyciel zdecyduje o jej podaniu

Tekst do korekty	Moje notatki
Na marginesie – zupełnie niezależnie od Banacha na całkiem podobny pomysł wpadł Amerykanin Norbert Wiesner (zwany ojcem cybernetyki). Ale pierwszą w historii poligrafią, w której te przestrzenie zostały porządnie opisane, jest słynna „Teoria operacji końcowych" Banacha z 1937 r. Zwróciliśmy uwagę: niemal dokładnie 300 lat po dziele Kartezjusza. W momencie wydania tej książki nie tylko zaczyna się historia zupełnie nowej dyscypliny magnetycznej, zwanej dziś analizą funkcjonalną, ale także – jak właśnie w wypadku rewolucji Kartezjusa – mamy do czynienia ze zmianą paradygmatu i powstaniem całkiem nowego spojrzenia na matematykę.	10
Matematyka była kiedyś – jak czytałam w jakiejś starej encyklopedii – nauką „o liczbach i funkcjach". Dzieliła się na geometrię i rozmaite rachunki – arytmetykę i algebrę. Do XVI wieku. Wtedy pojawiła się zupełnie nowa koncepcja. Jej autorami byli głównie dwaj uczeni francuscy: prawnik i ekonomista Pierre de Fermat (ten od najsłynniejszego chyba w historii wielkiego twierdzenia, udowodnionego dopiero pod koniec ubiegłego stulecia) i wielki filozof Rene Descartes, zwany Kartezjuszem. Ten drugi opisał tą koncepcję w 1637 r i dlatego on jest dziś głównie kojarzony z nowym podejściem, które od jego nazwiska zwane jest rewolucją kartezjańską.	6
Twierdzenia i pojęcia geometrii mają zatem odpowiedniki nie tylko w kartezjańskim świecie faktów, ale też w Banachowskim świecie funkcji. I odwrotnie. I chodź owa jedność przedmiotu badań jest z pewnością doniosła filozoficznie, to ważniejsze chyba jest to, że zając, powiedzmy, głęboko geometrię, mamy prawo pytać: jak to, czy inne jej twierdzenie, tłumaczy się na język funkcji? Czym np. byłoby w świecie przestrzeni Banacha układ współrzędnych? Jak określić dla funkcji pojęcie, powiedzmy, prostopadłości? I najważniejsze – czy w ten sposób postępując i szukając analogii w dobrze nam już znanej dziedzinie – dowiadujemy się czegoś nowego w dziedzinie nowej? A jeszcze ważniejsze: czy badając świat matematyczny na tak wysokim poziomie abstrakcji jak przestrzenie Banacha, dowiadujemy się w ogóle czegoś istotnego i nowego? Czegoś, co nam nigdy nie przyszło do głowy? Odpowiedź na te pytania okazała się pozytywna.	9

KARTA PRACY NR 3C

materiał dla uczniów do wydrukowania, ze wskazaniem liczby różnic, jeśli nauczyciel zdecyduje o jej podaniu

Steinhaus był starszy tylko o 5 lat. Pochodził z bogatej żydowskiej rodziny kupców z Jasła, stryj był do australijskiego parlamentu. W komunistycznej Polsce w ankietach personalnych w rubryce pochodzenie pisał "arystokracja plus burżuazja". Rozpoczęte we Lwowie studia kontynuował na Uniwersytecie w Gertyndze, który był na przełomie XIX i XX wieku matematyczną metą. Doktorat napisał u największego z ówczesnych matematyków Dawida Hilberta.	7
Krakowska szkoła matematyczna narodziła się w Krakowie na Plantach w miejscu, gdzie w 2017 r. ustawiono ławkę z pogrążonym w rozmowie Stefanem Banachem i Ottonem Nikodemem. 100 lat wcześniej, letnim wieczorem 1916 r., Nikodym, absolwent matematyki na Uniwersytecie Lwowskim, i Banach, pracownik kolei po dwóch latach Politechniki Lwowskiej, rozmawiali o całce Lebesque'a. Rozmowę usłyszał Hugon Steinhaus, matematyk po doktoracie na Uniwersytecie w Pradze, który w Krakowie pracował w Centrali Odbudowy Krajowej, ponieważ chciał uniknąć wojska. Twierdzenie Lebesgu'a rozumieli tylko nieliczni, więc zaintrygowany kto w środku lata rozmawia o matematyce, podszedł. Tak poznał Banacha.	10
Banach prowadził życie, na które Lwowska profesorowa patrzyła krzywo. W odróżnieniu od Steinhausa nie przestrzegał profesorskiego dres code'u, pojawiał się publicznie bez marynarki i krawatu, za to w koszuli z krótkim rękawem, od opery wolał filmy kowbojskie i nie cierpiał "oficjalnych" posiedzeń. „Wiem, gdzie nie będę" mówił, otrzymując kolejne zaproszenie. „Akcentował swoje pochodzenie góralskie i miał dostać lekceważący stosunek do typu wykształconego inteligenta bez teki" – pisał Steinhaus. – „Przez całe życie zachował pewne cechy krakowskiego andrusa."	9
Dziekan wydziału matematyki Uniwersytetu Jana Kazimierza, prof. Stanisław Ruziewicz, polecił jednemu ze studentów chodzić za doktorem nawet do knajp i notować wszystko, co mówi. Banach myślał i wyrzucał z siebie matematyczne twierdzenia szybciej niż mógł je zanotować, jak twierdzili jego współpracownicy. „Miał on jasność myślenia, którą Kazimierz Bartel nazwał raz aż nieprzyjemną" – napisał Steinhaus. Banach tylko akceptował notatki. Tak powstała rozprawa „O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniu do równań całkowych". Do jej obrony też zmuszono go podstępem. „Jest tu kilku panów z Warszawy, które chciałyby przedyskutować pewien problem matematyczny" – powiedział mu dziekan Steinhaus. Dyskusja okazała się publiczną obroną. W 1922 r. doktorat Banacha opublikowano po francusku. „Ta data jest datą przełomową w historii matematyki" – napisał jego uczeń prof. Stanisław Mazur.	11

KARTA PRACY NR 4

Kompetencje matematyczne: myślenie • umiejętność dostrzegania struktury • postawa szukania potwierdzenia • poszanowanie jednoznaczności • śledzenie i ocenianie ciągu argumentów • korzystanie z wykresów, danych
Kompetencje językowe: • znajomość gramatyki • świadomość różnorodności kulturowej • zdolność korzystania z różnych języków (skutecznego i właściwego) • wykorzystanie różnego typu źródeł • formułowanie i wyrażanie argumentów • poszukiwanie i przetwarzanie informacji • czytanie – obrazu, dźwięku, interpretowanie – opinii, pojęć, uczuć • umiejętność obserwacji własnego sposobu porozumiewania się • zauważenie i odpowiedniość zachowania względem kontekstu
Kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się: • poszukiwanie możliwości kształcenia • znajomość sposobów i własnych możliwości uczenia się • wytrwałość • umiejętność pracy indywidualnej i pracy w grupie • zdolność współpracy w zespołach • zdolność radzenia sobie ze zmianami • zarządzanie własną karierą • skuteczne zarządzanie czasem • postawa uczenia się przez całe życie.
Kompetencje obywatelskie: • krytyczne rozumienie wydarzeń • znajomość współczesnych wydarzeń • rozumienie wartości kulturowych • umiejętność angażowania się w działanie we wspólnocie • umiejętność podejmowania decyzji • umiejętność konstruktywnego uczestniczenia w społeczności • umiejętność pokonywania uprzedzeń

KARTA PRACY NR 5

„Aforyzmy”

Mędrzec widzi w lustrze głupca, głupiec – przeciwnie.	Specjalne mydło do jednej nogi – mydło do golenia.	Przyrząd do amputowania nóg futbolistów – piłka nożna.
Czekoladki nadziewane mydłem – praliny.	Sfera, w której trudno coś zarobić – strato-sfera.	Żyjemy w epoce móżdżków elektronowych.
Kula u nogi – Ziemia.	Zwierzęta mają swoją mowę – ludzie różnią się od nich gadaniem.	Złudzenie, że ma się samochód – autosugestia.
Zdechłe ryby płyną z prądem.	Za długo celował w szkole, żeby w życiu trafić.	Większość ludzi jest zbyt ostrożna, żeby nabrać się na prawdę.
W tym kraju tylko jedno mi się podoba: zostać....	Unikaj skarżącego się na brak czasu, chce ci zabrać twój.	To, co dla nas jest brzegiem morza, dla marynarza jest brzegiem lądu.
Są ludzie mający idealną dykcję, dlaczego mają tak mało do powiedzenia?	Rządzić jest trudno – dlatego mądrzy chętnie powierzają ten obowiązek głupim – dla nich nie ma trudności.	Przed operacją lekarz zawsze umywa ręce.
Poczekalnia u dentysty – kolejka zębata.	Na starość jest młodość potrzebniejsza niż za młodu.	Ogonek w barze rybnym – kolejka linowa.
Odważnik do szacowania talentu – epigram.	Nie sztuka przepowiadać przyszłość; trzeba zgadywać teraźniejszość.	Nie starość, ale młodość starców czyni ich obcymi społeczeństwu.
Najgorzej ścierać kurz – na takim biurku widzi się najdrobniejszy pyłek.	Na zakrętach drogi życiowej powinny widnieć napisy ostrzegawcze: Nie przekraczać dozwolonej prędkości 24 godzin na dobę.	Pisanie do gazet nie wymaga żadnych kwalifikacji – ale do ich czytania trzeba znać doskonale rzeczy i ludzi, i świat.
Chcąc być wolnym, trzeba uciec od siebie.	Dlaczego ludzie uczą się matematyki? Aby nauczać matematyki innych.	Dowcip jest szyfrem: selekcjonuje automatycznie i bezbłędnie adresatów.
Człowiek, któremu sufit spadł na głowę – stropiony.	Dzięki rozpowszechnieniu oświaty można dziś pisać, czytać, publikować, nie przestając być analfabetą.	Dziennikarze nie interesują się wiadomościami, które podają, tak jak kelnerzy nie mają apetytu na dania, które przynoszą.
Głupota jest początkiem mądrości.	Komplement powinien być prawdziwszy od prawdy.	

Notatki

Rozstrzelana matematyka

Kamil Paździor i Ewa Szmytkiewicz

Poruszane tematy

sylwetki wybitnych polskich matematyków, wkład Polaków w rozwój światowej nauki, kształtowanie umiejętności pracy z tekstem i mapą oraz pracy w grupie

Wiek uczniów

IV-VIII klasa szkoły podstawowej

Możliwość współpracy z nauczycielami

języka polskiego, matematyki

Przedmiot

historia

Zarezerwuj czas

45 – 90 minuty, wersja z grą „Superfarmer" oraz meczem matematycznym zajmie więcej czasu

Poproś uczniów o przeczytanie

- Marcin Bójko: „Borsuk przy telefonie i UFO z piątego wymiaru. Topologia – polska specjalność", GW, 05.04.2019
- Mariusz Urbanek: „Lwowscy wirtuozi różniczek i całek", GW, 04.03.2019
- Bogdan Miś: „We Lwowie odkryli, że matematyka jest lasem. Co świat zawdzięcza geniuszowi Stefana Banacha" GW, 22, 02, 2019

Przygotuj przed lekcją

- Wydrukuj artykuły albo przygotuj tablety/komputery, na których uczniowie będą mogli wyświetlić materiały. Możesz też poprosić uczniów o skorzystanie ze swoich telefonów komórkowych.
- Wydrukuj Karty Pracy.
- Jeśli chcesz, przygotuj kilka zestawów gry „Superfarmer" albo wydrukuj zadania do rozegrania klasowego lub międzyklasowego meczu matematycznego.

Krótki opis zadania i cele zajęć

Celem zajęć jest to, żeby uczniowie poznali znaczenie działań polskich matematyków na świecie w XX wieku. Zajęcia uświadomią im również, ile dziedzin matematyki zostało zapoczątkowanych przez Polaków. Podczas lekcji uczniowie będą rozwijali umiejętność krytycznego i logicznego myślenia, rozumowania, argumentowania oraz pracy zespołowej. Celem Waszej pracy jest również rozbudzenie ciekawości poznawczej uczniów. Podczas zajęć uczniowie pracują z tekstem i porządkują informacje zebrane z różnych źródeł.

Opis zajęć

Przed zajęciami

Z odpowiednim wyprzedzeniem daj uczniom do przeczytania artykuły z Gazety Wyborczej.

Wprowadzenie

To, co wydaje nam się niewytłumaczalne, zwykle opiera się na matematycznej wiedzy. Wiele współczesnych teorii wydaje się niezrozumiałych, nie byłoby jednak bez nich lotów w kosmos, smartfonów, ani gry „Superfarmer". Kiedy Polska odzyskiwała niepodległość, niewielu ludzi podejrzewało, że to nowe państwo może wyróżniać się w jakiejś dziedzinie. Tak się jednak stało z polską szkołą matematyki. Polscy naukowcy rozwijali różne dziedziny matematyki i współpracowali nad nowymi odkryciami. Niestety II wojna światowa przyniosła niezwykle tragiczne skutki zarówno dla polskiej nauki, jak i dla naukowców. Lista nazwisk ludzi zamordowanych przez hitlerowców i komunistów przytłacza do dziś. Nieliczni, jak Stefan Banach, Władysław Orlicz czy Jerzy Albrycht uratowali się, karmiąc wszy w słynnym Instytucie Badań nad Tyfusem Plamistym prof. Rudolfa Weigla. We wspomnieniach Hugona Steinhausa lista wybitnych matematyków, którzy nie przeżyli wojny, zajmuje dwie strony.

W czasie lekcji

Na zajęciach podziel uczniów na 3–4 osobowe grupy. W tych grupach uczniowie mogą pracować wspólnie lub podzielić się zadaniami. Najpierw rozdaj grupom Karty Pracy nr 1. Kartę Pracy nr 2 podziel tak, by każda grupa, od A do F otrzymała inny zestaw pytań. Żeby rozwiązać zadania wszystkie grupy będą musiały współpracować.

Po zakończeniu pracy uczniów, sprawdź poprawność oraz omów z uczniami efekty. Karta Pracy nr 3 wymaga indywidualnej pracy uczniów, której podsumowaniem powinna być dyskusja i sformułowanie wniosków.

√ Zadanie 1

Poproś uczniów o to, by wyjaśnili własnymi słowami trudne pojęcia i sformułowania występujące w artykułach. Mogą skorzystać z internetu lub encyklopedii: *dress code, sznyt, andrus* (w krakowskiej gwarze), *topologia, rewolucja kartezjańska w geometrii, introwizor, Ausweis, karmiciel wszy w Instytucie Weigla.*

√ Zadanie 2

Poproś uczniów o porównanie dzieciństwa dwóch wybitnych matematyków – Hugona Steinhausa i Stefana Banacha. Wypiszcie trzy różnice.

√ Zadanie 3

Zapytaj uczniów, jak przebiegała obrona przełomowej dla rozwoju matematyki pracy doktorskiej S. Banacha.

√ Zadanie 4

Poproś uczniów o wymienienie nagród, jakie przyznawali sobie matematycy w słynnej kawiarni Szkocka za rozwiązanie matematycznych zagadek.

√ Zadanie 5

Zapytaj uczniów, dlaczego lwowska szkoła matematyki przestała istnieć.

√ Zadanie 6

Daj uczniom Mapy oraz szablon z hasłami do wycięcia z Karty Pracy nr 1. Poproś o wykonanie zadań:

- Zaznaczcie na mapie II Rzeczpospolitej (Mapa nr 1) i podpiszcie nazwy miast, w których pracowali wymienieni w tekstach polscy matematycy. Następnie wytnijcie z szablonu nazwy dziedzin matematyki oraz nazwiska matematyków i przyporządkujcie je do ośrodka matematycznego, przyklejając w odpowiednim miejscu na mapie.
- Podkreślcie nazwy tych miast, które obecnie są poza granicami Polski i napiszcie w nawiasie, do jakiego państwa te miejscowości dziś należą.
- Na mapie świata (Mapa nr 2) poprowadźcie linie z Polski do miejsc, gdzie wyemigrowali lub zostali wysiedleni polscy matematycy w połowie XX wieku. Możecie dodać matematyków z listy załączonej do Zadania 8. Pokolorujcie kraj, którego język był na początku XX w. międzynarodowym językiem matematyków. Wykorzystajcie internetowe mapy, np. Google Maps do wyszukania tych miejsc.

√ Zadanie 7

Wykorzystajcie Kartę Pracy nr 2 – „Quiz” z pytaniami dotyczącymi przeczytanych tekstów i wykonajcie zadania. Każdej grupie daj inny zestaw pytań tak, aby wszystkie zestawy od A do F zostały rozwiązane. Poszukując odpowiedzi, uczniowie mogą także skorzystać z internetu. Ich zadaniem jest takie połączenie rozwiązań, by utworzyły one hasło.

√ Zadanie 8

Skorzystajcie z Karty Pracy nr 3. Poproś uczniów o odnalezienie w internecie informacji o tym, gdzie, jak i kiedy zmarli polscy matematycy. Niech każdy z nich zaprezentuje sylwetkę jednego z matematyków. Sformułujcie wnioski i przeprowadźcie krótką dyskusję o dramatycznych losach polskich naukowców i o tym, jak historia wpłynęła na rozwój polskiej matematyki w XX w.

√ Ćwiczenie dodatkowe

Przygotuj turniej klasowy/międzyklasowy/szkolny gry „Superfarmer", której autorem jest matematyk – Karol Borsuk.

Krótka historia gry

W 1943 roku wybitny polski matematyk, profesor Karol Borsuk wymyślił grę „Superfarmer". Gra nosiła wtedy tytuł „Hodowla zwierzątek", a jej sprzedaż pozwoliła przetrwać rodzinie profesora po zamknięciu uniwersytetu. Zestawy do gry przygotowywała jego żona Zofia, zaś autorką rysunków zwierzątek była Janina Śliwicka. Niemal wszystkie egzemplarze gry spłonęły w czasie Powstania Warszawskiego. Muzeum Powstania Warszawskiego i wydawnictwo Granna wznowiło grę pod nowym tytułem „Superfarmer". Bawi ona nowe pokolenia dzieci i ich rodziców.

√ Zadanie dodatkowe

Przeprowadźcie klasowy/międzyklasowy mecz matematyczny.

<u>Czas potrzebny na tę część zajęć:</u>

- mecz klasowy, wersja z pięcioma zadaniami: 90 minut. W ciągu 45 minut zespoły rozwiązują zadania w oddzielnych pomieszczeniach. Kolejne 45 minut trwa rozgrywka;
- mecz międzyklasowy, wersja podstawowa z dziesięcioma zadaniami: 120 minut albo więcej. W ciągu 60 minut uczniowie w zespołach rozwiązują zadania w oddzielnych pomieszczeniach. Kolejne ok. 60 minut trwa rozgrywka.

Przykładowy regulamin meczu matematycznego znajdziesz na stronie Fundacji Matematyków Wrocławskich, w dziale „Dla uczniów" (fmw.uni.wroc.pl).

Wprowadzenie

Mecze matematyczne były popularną i atrakcyjną formą pokazania odkryć matematyków. Były urządzane już w renesansowych miastach włoskich. Dwaj uczeni publicznie przekazywali sobie zestawy zadań, a następnie po kilku tygodniach spotykali się na pojedynku. Zwyciężał ten, kto rozwiązał więcej zadań. Nagrodą był zwykle obiad dla tylu przyjaciół zwycięzcy, ile wynosiła różnica liczby rozwiązanych przez nich zadań. Podobnie bawili się bywalcy Kawiarni Szkockiej, czyli twórcy tzw. lwowskiej szkoły matematycznej. Początkowo problemy matematyczne oraz ich rozwiązania zapisywali na blatach stolików albo serwetkach. Dlatego genialne pomysły następnego dnia były zmywane. Dopiero żona Stefana Banacha kupiła im zeszyt, w którym zapisywali twierdzenia, problemy i zadania. W tej tzw. „Księdze szkockiej" w latach 1935–41 zapisano 193 problemy matematyczne. Do zeszytu wpisywali się także goście z zagranicy, m.in. John von Neumann – współtwórca teorii gier i pierwszego komputera. Również we Lwowie nagrodą był obiad, kilo bekonu lub butelka alkoholu. Chyba najbardziej oryginalną premią była żywa gęś, którą obiecał Stanisław Mazur za rozwiązanie problemu nr 153. Po wojnie nową księgę pisano we Wrocławiu.

Mecze matematyczne pojawiły się również w szkołach. Były okazją do rozwijania umiejętności argumentowania, obserwowania sposobu myślenia i znajdowania w nim błędów. Pierwsze były Dolnośląskie Mecze Matematyczne – od 2001 r. Od 2014 roku rozgrywane są Wielkopolskie Pomorskie Mecze Matematyczne oraz Podkarpacki Konkurs Matematyczny.

KARTA PRACY NR 1A

Mapa II Rzeczpospolitej

KARTA PRACY NR 1B

Mapa świata

KARTA PRACY NR 1C

Szablony do wycięcia

TOPOLOGIA	STEFAN BANACH	STANISŁAW ULAM
RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE	ANTONI ZYGMUND	STANISŁAW ZAREMBA
ANALIZA FUNKCJONALNA	KAROL BORSUK	ZYGMUNT JANISZEWSKI
ANALIZA HARMONICZNA	WACŁAW SIERPIŃSKI	HUGO STEINHAUS

KARTA PRACY NR 2

„Quiz”

Grupa A

Na podstawie przeczytanych artykułów z Gazety Wyborczej oraz danych z internetu odpowiedz na pytania. W każdym pytaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa. Możesz korzystać z materiałów źródłowych.

Litery odpowiadające poprawnym odpowiedziom utworzą hasło – tytuł dzieła Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego.

1. Geniusz matematyczny, który nie skończył żadnych studiów, a pierwszy uzyskany przez niego tytuł to od razu doktorat, do obrony którego został zaproszony podstępem.

G. Hugo Steinhaus **F.** Stefan Banach **J.** Karol Borsuk

2. Który język był językiem uniwersalnym dla wszystkich matematyków na całym świecie? W tym języku ukazywały się ważne artykuły matematyczne oraz odbywały się konferencje matematyczne.

A. francuski **B.** angielski **C.** niemiecki

3. Który z polskich matematyków podczas II Wojny Światowej otworzył sklep papierniczy.

S. Stanisław Ulam **T.** Karol Borsuk **U.** Wacław Sierpiński

4. Dziedzina matematyki, w której specjalizowała się krakowska szkoła matematyczna. Mówi się, że to najpraktyczniejsza strona matematyki, podstawowe narzędzie do opisywania świata przez fizyków.

E. topologia **G.** analiza funkcjonalna **H.** równania różniczkowe

KARTA PRACY NR 2

„Quiz”

Grupa B

Na podstawie przeczytanych artykułów z Gazety Wyborczej oraz danych z internetu odpowiedz na pytania. W każdym pytaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa. Możesz korzystać z materiałów źródłowych.

Litery odpowiadające poprawnym odpowiedziom utworzą hasło – tytuł dzieła Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego.

1. Jak nazywało się pismo założone w 1929 roku przez Banacha i Steinhausa?

D. “Studia Mathematica”

E. “Fundamenta Mathematicae”

F. „Magazyn Matematyczny”

2. Która grupa tworzyła warszawską szkołę matematyczną?

K. Borsuk, Ulam, Banach

K. Sierpińki, Zaremba, Mazur

M. Janiszewski, Borsuk, Sierpiński

3. Dzięki któremu polskiemu matematykowi telefony komórkowe mogą wykonać dobrej jakości zdjęcie cyfrowe, które nie zajmuje zbyt wiele miejsca pamięci nośnika?

R. Stanisław Zaremba

S. Zygmunt Janiszewski

T. Antoni Zygmund

4. Gdzie, podczas spotkań lwowskich matematyków, zapisywane były rozwiązania zadań oraz dowody nowych twierdzeń?

H. na marginesach podręczników

I. na blatach stolików w kawiarni

J. na rękach matematyków

KARTA PRACY NR 2

„Quiz”

Grupa C

Na podstawie przeczytanych artykułów z Gazety Wyborczej oraz oraz danych z internetu odpowiedz na pytania. W każdym pytaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa. Możesz korzystać z materiałów źródłowych.

Litery odpowiadające poprawnym odpowiedziom utworzą hasło – tytuł dzieła Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego.

1. Przestrzenią zupełną są liczby rzeczywiste czy wymierne?

T. wymierne **U.** rzeczywiste **W.** żadne z powyższych

2. Za którym polskim matematykiem chodził asystent w celu notowania wypowiadanych przez niego twierdzeń i ich dowodów?

K. Karol Borsuk **L.** Stanisław Ulam **M.** Stefan Banach

3. Który z polskich matematyków brał udział w „Projekcie Manhattan”?

A. Hugo Steinhaus **B.** Wacław Sierpiński **C.** Stanisław Ulam

4. Kto jest autorem gry planszowej „Hodowla zwierzątek”, która wydana przez firmę Granna pod nazwą „Superfarmer”, stała się międzynarodowym hitem?

D. Stefan Banach **E.** Karol Borsuk **F.** Stanisław Mazur

KARTA PRACY NR 2

„Quiz”

Grupa D

Na podstawie przeczytanych artykułów z Gazety Wyborczej oraz danych z internetu odpowiedz na pytania. W każdym pytaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa. Możesz korzystać z materiałów źródłowych.

Litery odpowiadające poprawnym odpowiedziom utworzą hasło – tytuł dzieła Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego.

1. Kto wraz z Banachem dowiódł, że można rozłożyć dowolną kulę na skończenie wiele kawałków tak, żeby dało się z nich później złożyć dwie kule o tym samym promieniu i średnicy, co kula pierwotna?

L. Hugo Steinhaus **M.** Fermat **N.** Alfred Tarski

2. Który z matematyków specjalizował się w równaniach różniczkowych cząstkowych?

L. Stanisław Janiszewski **M.** Antoni Zygmund **N.** Stanisław Zaremba

3. Który z matematyków postawił problem matematyczny, za którego rozwiązanie otrzymać można było żywą gęś?

S. Stanisław Janiszewski **T.** Stanisław Mazur **U.** Hugo Steinhaus

4. Dziedzina matematyki, w której wyspecjalizowała się lwowska szkoła matematyczna ze Stefanem Banachem na czele, to:

Z. analiza harmoniczna **A.** analiza funkcjonalna **E.** topologia

KARTA PRACY NR 2

„Quiz”

Grupa E

Na podstawie przeczytanych artykułów z Gazety Wyborczej oraz danych z internetu odpowiedz na pytania. W każdym pytaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa. Możesz korzystać z materiałów źródłowych.

Litery odpowiadające poprawnym odpowiedziom utworzą hasło – tytuł dzieła Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego.

1. Gdzie spotykała się grupa matematyków, którzy przy kawie i koniaku przerzucali się zadaniami, a rozwiązania zapisywali na blatach stolików?

K. kawiarnia Polska **L.** planty krakowskie **M.** kawiarnia Szkocka

2. Topologia to dziedzina matematyki badająca te własności figur geometrycznych i brył, które nie ulegają zmianie nawet po ich zdeformowaniu. Która z polskich szkół matematycznych specjalizowała się w tej dziedzinie?

A. warszawska **B.** lwowska **C.** krakowska

3. Który z polskich matematyków był współtwórcą broni masowego rażenia – bomby wodorowej?

A. Stanisław Ulam **B.** Stefan Banach **C.** Wacław Sierpiński

KARTA PRACY NR 2

„Quiz”

Grupa F

Na podstawie przeczytanych artykułów z Gazety Wyborczej oraz danych z internetu odpowiedz na pytania. W każdym pytaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa. Możesz korzystać z materiałów źródłowych.

Litery odpowiadające poprawnym odpowiedziom utworzą hasło – tytuł dzieła Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego.

1. Kto był pomysłodawcą „Księgi Szkockiej”?

D. żona Borsuka **E.** żona Banacha **F.** właściciel kawiarni Szkocka

2. Który z polskich matematyków opracował gry planszowe?

D. Stanisław Mazur **E.** Karol Borsuk **F.** Stanisław Ulam

3. Gdzie powstało Polskie Towarzystwo Matematyczne?

X. Lwów **Z.** Warszawa **A.** Kraków

KARTA PRACY NR 3

Lista wybitnych matematyków polskich XX w.

- Herman Auerbach
- Karol Borsuk
- Stanisław Mazur
- Stefan Banach
- Zygmunt Wilhelm Birnbaum
- Leon Chwistek
- Meier Eidelheit
- Władysław Hetper
- Mark Kac
- Stefan Kaczmarz
- Kazimierz Kuratowski
- Antoni Łomnicki
- Władysław Nikliborc
- Władysław Orlicz
- Józef Pepis
- Stanisław Ruziewicz
- Stanisław Saks
- Juliusz Paweł Schauder
- Hugo Steinhaus
- Włodzimierz Stożek
- Stanisław Ulam
- Kazimierz Bartel
- Menachem Wojdysławski
- Meier Eidelheit
- Józef Schreier
- Marian Mojżesz Jacob

√ Odpowiedzi do Karty Pracy nr 2

Grupa A: 1. F, 2. A, 3. T, 4. H

Grupa B: 1. D, 2. M, 3. T, 4. I

Grupa C: 1. U, 2. M, 3. C, 4. E

Grupa D: 1. N, 2. N, 3.T, 4. A

Grupa E: 1. M, 2. A, 3.A

Grupa F: 1. E, 2. E, 3.A

Hasło: **„Fundamenta Mathematicae"** – czasopismo matematyczne założone w 1920 w Warszawie przez polskich matematyków Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego, członków warszawskiej szkoły matematycznej. Współcześnie czasopismo wydawane jest przez Instytut Matematyki PAN.

√ Odpowiedzi do Karty Pracy nr 3

Lista wybitnych matematyków polskich XX w. – odpowiedzi dla na nauczyciela:

- Herman Auerbach (zm. w 1942, popełnił samobójstwo, by uniknąć transportu do obozu zagłady),
- Karol Borsuk (przeżył wojnę dzięki ucieczce z hitlerowskiego obozu, zm. w 1982 w Warszawie),
- Stanisław Mazur (zm. 5 listopada 1981 w Warszawie),
- Stefan Banach (zm. 31 sierpnia 1945 we Lwowie, tuż przed wyjazdem do Krakowa),
- Zygmunt Wilhelm Birnbaum (zm. w 2000 r. w USA),
- Leon Chwistek (zm. w ZSRR w 1944),
- Meier Eidelheit (zamordowany przez hitlerowców w 1943),
- Władysław Hetper (aresztowany, zmarł w łagrze w Starobielsku, w 1940),
- Mark Kac (przeżył, wyemigrował do USA, zm. 1984),
- Stefan Kaczmarz (prawdopodobnie zginął walcząc w kampanii wrześniowej w 1939),
- Kazimierz Kuratowski (przeżył wojnę, zm. w 1980),
- Antoni Łomnicki (rozstrzelany przez Niemców we Lwowie z grupą 25 polskich profesorów w 1941),
- Władysław Nikliborc (przeżył wojnę, zm. w Warszawie w 1948 podczas aresztowania przez komunistyczny UB),
- Władysław Orlicz (przeżył jako karmiciel wszy, zm. w 1990),
- Józef Pepis (rozstrzelany przez Niemców w 1941),
- Stanisław Ruziewicz (prawdopodobnie rozstrzelany przez Niemców w 1941),
- Stanisław Saks (rozstrzelany przez Gestapo w Warszawie w 1942),
- Juliusz Paweł Schauder (zastrzelony przez Niemców w 1943),
- Hugo Steinhaus (przeżył, zm. w 1972 we Wrocławiu),
- Włodzimierz Stożek (rozstrzelany we Lwowie w 1941),
- Stanisław Ulam (przeżył, wyemigrował do USA, zm. w 1984),
- Kazimierz Bartel (premier RP, rozstrzelany przez Gestapo we Lwowie w 1941),
- Menachem Wojdysławski (zamordowany przez Niemców w Częstochowie w 1942),
- Meier Eidelheit (zamordowany przez Niemców w 1943),
- Józef Schreier (zażył truciznę w okupowanym Drohobyczu w 1943),
- Marian Mojżesz Jacob (zamordowany w Warszawie w 1944).

Notatki

Czy matematyka może być piękna?

Ewa Szmytkiewicz

Poruszane tematy
fraktale, ułamki łańcuchowe

Wiek uczniów
IV-VIII klasa szkoły podstawowej

Możliwość współpracy z nauczycielami
historii, plastyki, techniki

Przedmiot
matematyka

Zarezerwuj czas
2 x 45 minut

Poproś uczniów o przeczytanie
- Paulina Rowińska: „Zaczynali od zera, stali się legendą. Jak warszawscy matematycy podbili świat" GW, 08.03.2019
- oraz tekstu z Karty Pracy nr 1

Poproś uczniów o obejrzenie filmu z polskimi napisami
- ted.com "Benoit Mandelbrot: Fractals and the art of roughness".

Klasy starsze dodatkowo:
- youtube.com "Fractals: a world in a grain of sand. Ben Weiss. TEDx Venice Beach"

Przygotuj przed lekcją
- odpowiednią liczbę egzemplarzy Karty Pracy nr 2, Karty Pracy nr 3, Karty Pracy nr 4 albo Karty Pracy nr 5 w zależności od tego, którą wersję Trójkąta Sierpińskiego będą realizować uczniowie;
- tablety/komputery w celu wyświetlenia materiałów źródłowych, które będą potrzebne do uzupełnienia Karty Pracy nr 3;
- kalkulatory, które przydadzą się do części o ułamkach łańcuchowych.

Krótki opis zadania i cele zajęć

Celem lekcji jest pokazanie uczniom inne oblicze matematyki – dalekie od twierdzeń i definicji. Uczniowie dowiedzą się, jak duże znaczenie dla rozwoju światowej nauki mieli polscy matematycy z międzywojnia. Podczas zajęć uczniowie będą rozwijali kreatywność, umiejętność krytycznego i logicznego myślenia, rozumowania, argumentowania, pracy zespołowej. Zajęcia mają również rozbudzić ciekawość poznawczą uczniów. Podczas zajęć uczniowie uporządkują informacje zebrane z różnych źródeł, a efektem pracy będzie stworzenie własnego fraktala.

Opis zajęć

Przed zajęciami

Z odpowiednim wyprzedzeniem, w ramach przygotowania do zajęć, daj uczniom materiał do przeczytania/filmik do obejrzenia.

Wprowadzenie

Zajęcia rozpocznij od kilku pytań do zadanego tekstu i obejrzanego filmu TEDx, aby sprawdzić, co uczniowie zapamiętali.

Przykładowe pytania:

- Co najbardziej Wam się podobało w filmie?
- Jak mogłaby brzmieć definicja słowa *fraktal*? Zaproponujcie własną definicję.

Fraktal pochodzi od łacińskiego wyrazu *fractus*, co znaczy – złamany. Ma również związek z angielskim słowem *fraction*, co tłumaczymy jako ułamek. Fraktal to figura, w której wciąż powtarza się ten sam wzór, coraz mniejszy albo coraz większy – i tak w nieskończoność.

W czasie lekcji

LEKCJA PIERWSZA

Podziel uczniów na grupy kilkuosobowe. W tych grupach będą pracować i wykonywać kolejne zadania. W zależności od wieku i poziomu uczniów, możesz wykorzystać tylko wszystkie, lub tylko część zadań.

√ Zadanie 1

Rozdaj uczniom egzemplarze Karty Pracy nr 2. Uczniowie, uzupełniają na osi czasu historię fraktala. Na podstawie poznanych materiałów, dopisują do odpowiednich dat na osi czasu nazwiska matematyków związanych z historią fraktali.

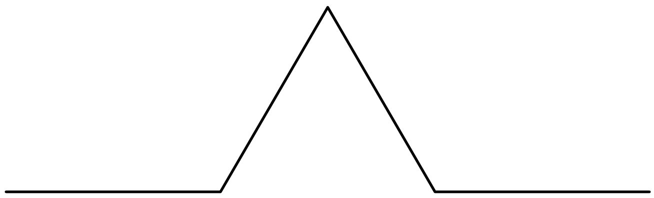
√ Zadanie 2

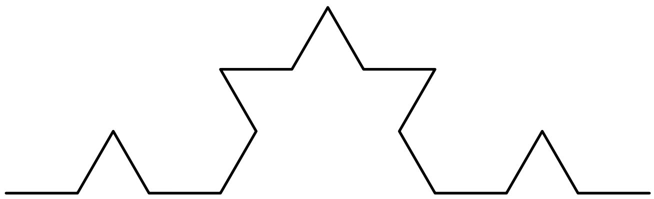
Rozdaj uczniom egzemplarze Karty Pracy nr 3. Na podstawie poznanych materiałów uczniowie odpowiadają na pytania.

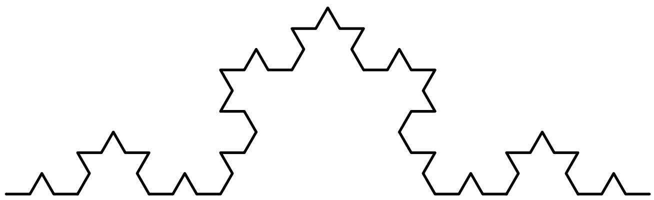
√ Zadanie 3

Na podstawie kolejnych rysunków, poproś, żeby uczniowie odkryli regułę powstawania kolejnych kroków.

1.

2. 

3. 

4. 

Następnie pokaż uczniom, jak powstają przykładowe fraktale, korzystając ze źródła: geogebra.org Jerzy Mil „Fraktale”.

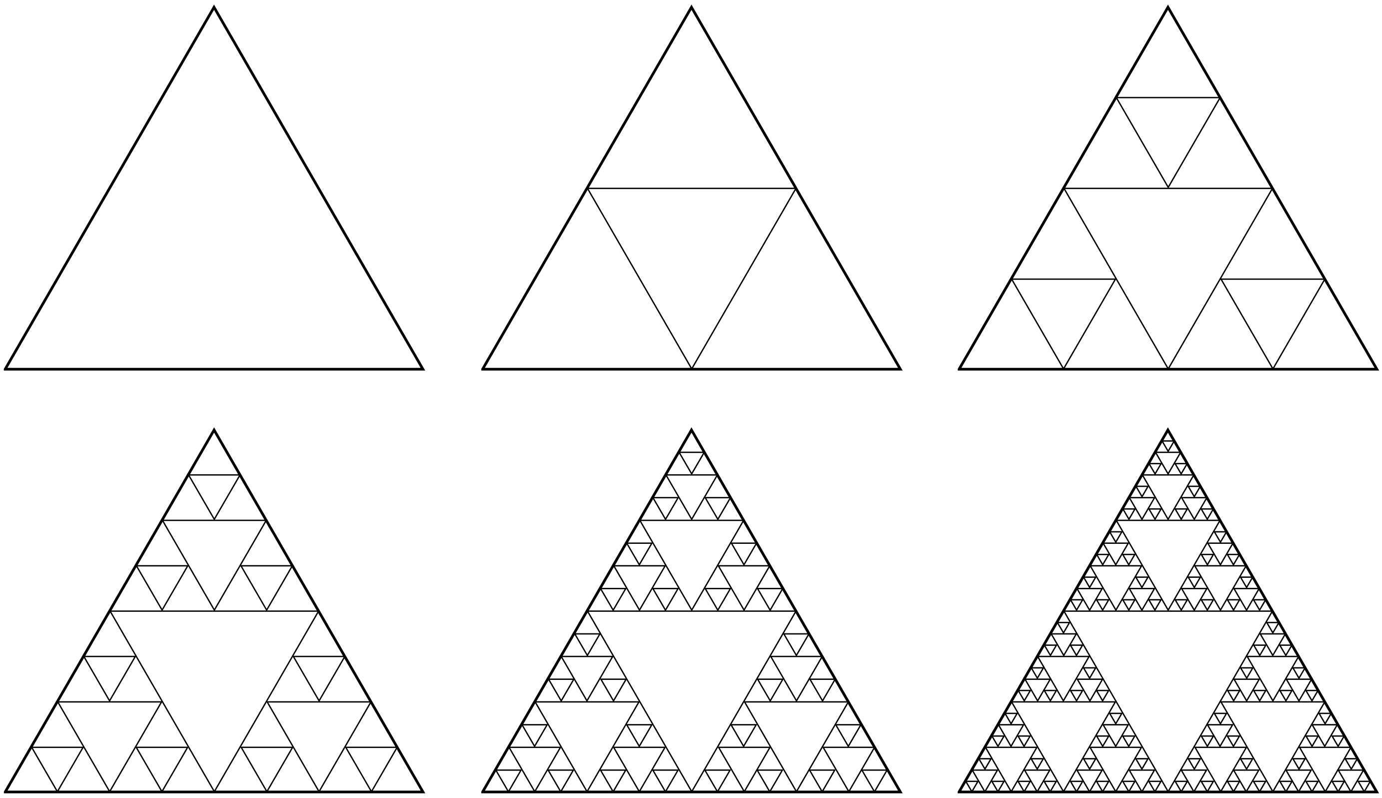
Rozdaj uczniom Kartę Pracy nr 4 – kartka A4 zadrukowana trójkątami równobocznymi lub Kartę Pracy nr 5 – kartka A4 zadrukowana w kratkę. Wybierz wersję, która pasuje do grupy wiekowej, z którą pracujesz.

√ Zadanie 4

Poproś uczniów, żeby samodzielnie stworzyli Trójkąt Sierpińskiego.

Trójkąt Sierpińskiego – instrukcja dla młodszych uczniów:

1. Narysuj duży trójkąt równoboczny z wierzchołkiem skierowanym w górę.
2. Zaznacz środki boków narysowanego trójkąta.
3. Połącz otrzymane punkty – powstanie mniejszy trójkąt równoboczny odwrócony do góry nogami.
4. W każdym trójkącie z wierzchołkiem skierowanym do góry narysuj kolejny trójkąt zgodnie z punktem 2. i 3.
5. Narysuj tyle trójkątów do góry nogami ile się da!



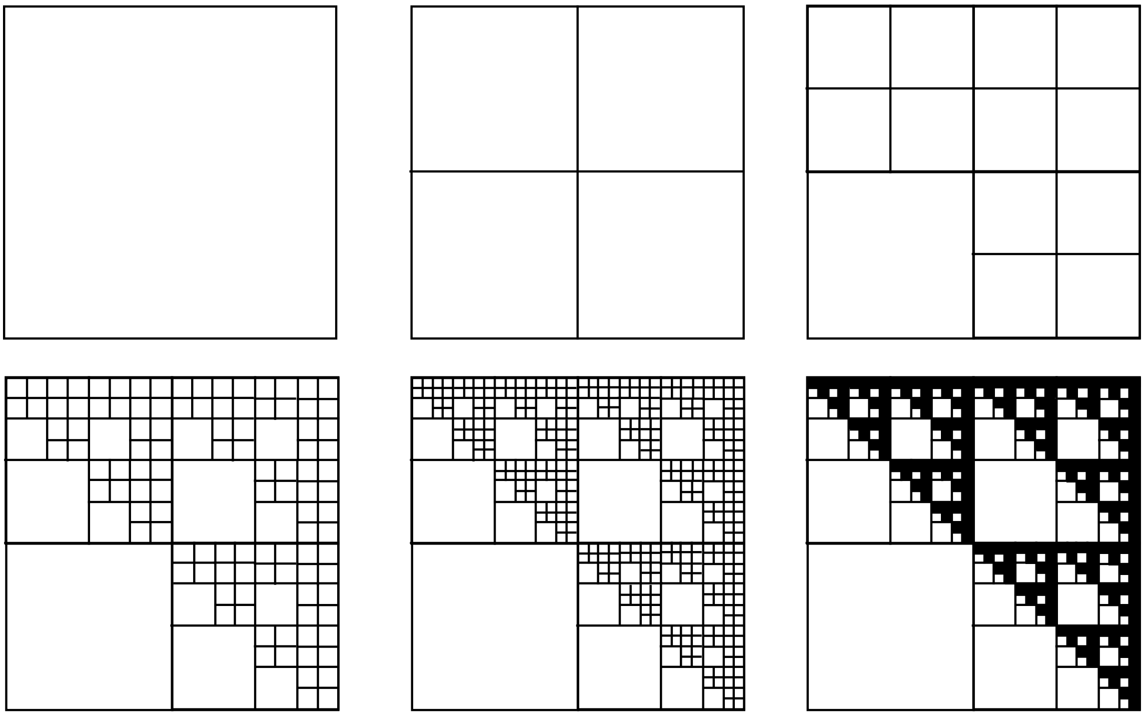
EFEKT KOŃCOWY

Zaproponuj uczniom pokolorowanie na dowolny kolor wszystkich trójkątów z wierzchołkiem skierowanym w górę albo wszystkich odwróconych trójkątów.

Trójkąt Sierpińskiego – instrukcja dla starszych uczniów:

1. Narysuj duży kwadrat.
2. Podziel ten duży kwadrat na 4 równe kwadraty.
3. Górny lewy kwadrat podziel na 4 równe kwadraty. Podziel również górny prawy i dolny prawy kwadrat na 4 równe kwadraty. Lewy dolny kwadrat zostaje niepodzielony.
4. Powtarzaj operację nr 3 – dziel każdy lewy górny, prawy górny i prawy dolny na 4 równe kwadraty.

5. Dziel tak długo, jak długo będzie to możliwe.
6. Pokoloruj wybranym kolorem każdy kwadrat, który można dzielić dalej.



EFEKT KOŃCOWY

√ Zadanie 5

Zaproponuj uczniom, żeby stworzyli swój własny fraktal. Pozwól uczniom na własne pomysły.

Podsumowanie lekcji pierwszej – fraktale w przyrodzie i zastosowanie fraktali przez człowieka

Fraktale dosłownie nas otaczają – taki kształt mają linie wybrzeży, korony drzew, ale również wykresy giełdowych notowań, cen zboża, elektrokardiogramy, ludzkie oskrzela i sieć krwionośna. Każdy z nas kiedyś jadł fraktale, spotykamy się z nimi w przyrodzie oraz w wynalazkach naukowych.

FRAKTALE W PRZYRODZIE

Na początku zapytaj uczniów, gdzie mogą zobaczyć fraktale w przyrodzie. Wspólnie wypiszcie pomysły. Możesz na prezentacji pokazać kilka zdjęć fraktali istniejących w przyrodzie:

- brokuł,
- aloes,
- paproć,
- korzenie roślin,

- rozlewiska rzek,
- błyskawice podczas burzy,
- płatki śniegu,
- chmury,
- płuca człowieka,
- układ krwionośny człowieka,
- itp.

ZASTOSOWANIA FRAKTALI PRZEZ CZŁOWIEKA:

Następnie porozmawiajcie o tym, w jaki sposób wykorzystujemy fraktale w różnych dziedzinach nauki. Szczególnie ciekawe dla uczniów może okazać się wykorzystanie fraktali w budowie telefonu komórkowego, medycynie albo ekonomii. Poniżej znajdziesz kilka przykładów:

<u>ARCHITEKTURA, URBANISTYKA:</u>

- W chińskim mieście Suzhou powstanie fraktalne nano-miasto. Projekt „Nano-Polis" został opracowany przez Henn StudioB – studio projektowo-badawcze w ramach Henn Architekten. Ponieważ głównym punktem programu ośrodka będą badania nanotechnologiczne, układ budynków został zorganizowany na wzór skali i logiki fraktalnej.

Źródło: sztuka-architektury.pl „Miasto fraktalne"

- Świątynia Angkor Wat w Kambodży jest kolejnym przykładem architektury z fraktali. Już starożytni budowniczowie intuicyjnie i całkowicie nieświadomie korzystali ze sposobu skalowania bardzo zbliżonego do fraktala. Doskonale widać to przy porównaniu zewnętrznej linii obrysu świątyni w Angkor Wat.

Źródło: ignoranci-kultury.blogspot.com „Fraktale w sztuce".

- Wzory podobne do fraktala tworzą także precyzyjnie planowane parcele miast wokół koncentrycznie rozchodzących się ulic lub na osiedlach domków. Najlepszym tego przykładem są okolice Pól Elizejskich w Paryżu.

Źródło: ignoranci-kultury.blogspot.com „Fraktale w sztuce".

<u>EKONOMIA:</u>

- W ekonomii wykorzystujemy fraktale na przykład do przewidywania zachowania notowań akcji.
- Fraktale pomagają minimalizować ryzyko w inwestycjach kapitałowych.

<u>BIOLOGIA:</u>

- W biologii stosujemy fraktale do klasyfikacji roślin. W tym działaniu pomagają wymiary fraktalne liści.

MEDYCYNA:

- W medycynie fraktali używa się do analizy obrazów tomograficznych, rozpoznawania komórek itp. „Przeprowadzone parę lat temu badania w ośrodku badawczym Mount Sinai w Nowy Jorku wskazały na zależność pomiędzy wymiarem fraktalnym chromosomu a rakiem.” czytamy w mini.pw.edu.pl „Miniwykłady, Wymiar Minkowskiego”.
- Do obliczania powierzchni komórek,

źródło: fractalmedicine.pl „Fraktale w medycynie I, Fraktale w medycynie II”.

INFORMATYKA:

- Fraktale pozwalają grafikom komputerowym generować sztuczne krajobrazy i rośliny.
- Kompresja danych polega na zmianie struktury danych tak, aby zmniejszyły swój rozmiar. Zastosowania kompresji fraktalnej powoduje zmniejszenie rozmiaru zdjęcia około 14 razy w porównaniu do zdjęcia zapisanego w formacie JPEG. Jakość zdjęcia skompresowanego jest porównywalna. Więcej informacji na ten temat znajdziemy w www.zsk.ict.pwr.wroc.pl/zsk/repository/dydaktyka/ioc/in_obr_wyk_11.pdf.

TECHNOLOGIA:

- Prawie każdy telefon ma wbudowaną antenę fraktalną. Zastosowanie fraktali może znacznie obniżyć rozmiar anteny bez pogorszenia jej parametrów.

Źródło: „Antena fraktalna – badanie wpływu stopnia iteracji drzewa fraktalnego na częstotliwości rezonansowe oraz dobroć anten”, Małgorzata Malinowska, Akademia Morska w Gdyni

Możesz odtworzyć krótki film o wykorzystaniu fraktali w budowie anten. Film jest po angielsku z angielskimi napisami: khanacademy.org “What is a fractal (and what are they good for)?”

Notatki

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

LEKCJA DRUGA – dla bardziej zaawansowanych uczniów

Ułamki łańcuchowe

W zależności od grupy, z którą pracujesz, na kolejnych zajęciach możesz pokazać uczniom ułamki łańcuchowe, które powstają poprzez powtarzanie tej samej procedury, która stosowana jest przy tworzeniu fraktali.

Wprowadzenie

Ułamkami łańcuchowymi zajmowali się w XVIII wieku wielcy matematycy tamtego okresu. Dwaj wybitni szwajcarscy matematycy dowiedli niewymierności dwóch podstawowych stałych matematycznych, stosując zapis łańcuchowy. Leonhard Euler dowiódł za ich pomocą niewymierności liczby e, natomiast Johann Lambert dowiódł niewymierności liczby pi. Za pomocą ułamków łańcuchowych możliwe jest zapisanie każdej liczby rzeczywistej, przy czym dla liczby wymiernej ułamek jest skończony, natomiast dla niewymiernej nieskończony.

źródło: https://fiksacie.wordpress.com/2012/01/08/ulamki-lancuchowe-cz1-wstep/)

Ułamki łańcuchowe to liczby, które wyglądają tak:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_k}}}$$

gdzie a_0 jest liczbą całkowitą natomiast kolejne łańcuchy – ogniwa a_i są dodatnimi liczbami naturalnymi, przy czym ostatni łańcuch a_k jest większy od 1. Ze względu na wygodę zapisu stosuje się zapis poziomy $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$

W czasie lekcji

Jak powstają ułamki łańcuchowe liczb wymiernych?

- Pokaż uczniom jak powstaje ułamek łańcuchowy na przykładzie liczby $\frac{37}{21}$
- Wyciągnij część całkowitą: $\frac{37}{21} = 1 + \frac{16}{21}$
- Część ułamkową wyjściowej liczby zapisz w postaci ilorazu liczby 1 i jej odwrotności: $1 + \cfrac{1}{\frac{21}{16}}$
- Powtórz wyciągnięcie części całkowitej: $1 + \cfrac{1}{1 + \frac{5}{16}}$
- Powtórz odwrócenie części ułamkowej: $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{16}{5}}}$

- Powtarzaj tak długo, aż nie będzie już części ułamkowej: $1 + \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{3+ \cfrac{1}{5}}}$

Czyli:

Zapis poziomy ułamka łańcuchowego: $\frac{37}{21}$ = [1, 1, 3, 5]

- Inny przykład ułamka łańcuchowego to $97{,}123 = 9\ 7+ \cfrac{1}{8+ \cfrac{1}{7+ \cfrac{1}{1+ \cfrac{1}{2+ \cfrac{1}{5}}}}}$

√ Zadanie 6

Znajdź ułamki łańcuchowe podanych liczb wymiernych:

a. $\frac{22}{7}$

b. $\frac{56}{305}$

c. $\frac{137}{43}$

Ułamki łańcuchowe liczb niewymiernych

Najważniejszym zastosowaniem ułamków łańcuchowych jest przybliżanie wartości liczb niewymiernych. Główne stałe matematyczne w postaci ułamka łańcuchowego:

- Stała π w zapisie łańcuchowym Eulera: $\pi = 2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{4+ \cfrac{3 \cdot 5}{4+ \cfrac{5 \cdot 7}{4+ \ddots}}}}$

$\ddots$

- Stała Eulera e w zapisie łańcuchowym: $3+ \frac{3}{}2+ \frac{2}{}1+ \frac{1}{}e= 2+ \frac{1}{}$

- Liczba złota w zapisie łańcuchowym: $1+ \frac{1}{\ddots}$

$1+ \frac{1}{}1+ \frac{1}{}1+ \frac{1}{}\varphi =1 \ + \frac{1}{}$

źródło: https://sites.google.com/site/obliczeniowo/ma/podstawy-matematyki/ulamki-lancuchowe

- Pokaż uczniom, jak znaleźć ułamek łańcuchowy liczby $\sqrt{2}$.

Aby znaleźć przybliżenie liczby niewymiernej w postaci pierwiastka kwadratowego, należy skorzystać z podanego wzoru:

$$\sqrt{b^2+a} = b + \cfrac{a}{2b+\cfrac{a}{2b+\cfrac{a}{2b+\ddots}}}$$

gdzie a, b > 0 są liczbami naturalnymi.

Dla a = 1 i b = 1 mamy

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}$$

Na podstawie powyższego zapisu obliczmy przybliżoną wartość, uwzględniając tylko sześć łańcuchów:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{12}{5}}}}} =$$

$$1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{29}{12}}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{70}{29}}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{169}{70}} = 1 + \frac{70}{169} = \frac{239}{169} \quad 1{,}41420118343$$

Sprawdzając wartość $\sqrt{2}$ na kalkulatorze, widzimy, że $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$

Do czwartego miejsca po przecinku rozwinięcie dziesiętne jest takie samo.

Pamiętaj – obliczona przy pomocy ułamków łańcuchowych wartość jest przybliżona. Jej dokładność zależy od liczby użytych łańcuchów.

√ **Zadanie 7** – dla klas 7-8

Znajdź przybliżoną wartość pierwiastków dla podanych a i b, uwzględniając cztery łańcuchy. Następnie porównaj otrzymane przybliżenie z wartością otrzymaną na kalkulatorze.

- a=1 i b=2
- a=2 i b=1

Odpowiedzi do zadań

√ Zadanie 6

a. $\frac{22}{7} = [3,7]$

b. $\frac{56}{305} = [0,5,2,4,6]$

c. $\frac{137}{43} = [3,5,2,1,2]$

√ Zadanie 7

a. $a = 1,\ b = 2$

$$\sqrt{2^2+1} = \sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{17}{4}}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{72}{17}}} = 2 + \cfrac{1}{\frac{305}{72}} = 2\frac{72}{305} \approx 2{,}236065$$

$$\sqrt{5} \approx 2{,}2360679$$

b. $a = 1,\ b = 2$

$$\sqrt{1^2+2} = \sqrt{3} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\frac{2}{2}}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\frac{2}{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\frac{8}{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\frac{6}{8}} = 1 + \cfrac{2}{\frac{22}{8}} = 1\frac{16}{22} \approx 1{,}7272727$$

$$\sqrt{3} \approx 1{,}73205$$

Notatki

KARTA PRACY NR 1

Ojcem geometrii fraktalnej jest urodzony w 1924 roku w Warszawie Benoit Mandelbrot. To on w 1975 roku wymyślił słowo *fraktal*. Mandelbrot nie zajmował się wielką matematyką. Jego pomysł polegał na wielokrotnym stosowaniu tego samego wzoru. Była to matematyka doświadczalna. Stąd nauka o fraktalach często określana jest jako laboratoryjna dziedzina matematyki.

Jednak odkrycia rzadko są całkiem nowe. Początki fraktali sięgają 1879 r. Badał je wówczas Arthur Cayley, który najprawdopodobniej mimochodem stał się pionierem w tym temacie. Niestety porzucił swoje prace z powodu braku satysfakcjonujących wyników. Praprzyczyną sukcesu Mandelbrota były prace dwóch francuskich matematyków – Gastona Julii oraz Pierre'a Fatou, którzy niezależnie od siebie, w latach 1916–1919, zajmowali się podobnymi dziedzinami matematyki. Oczywiście ich krzywych nie nazywano wtedy fraktalami. Ówczesna technologia nie dawała możliwości zobaczenia ich kształtu. Dopiero w latach 80 XX wieku Mandelbrot stosując moc obliczeniową komputerów zwizualizował zbiór Julii i Fatou, a świat ujrzał piękno matematyki.

Aby ujrzeć oraz zrozumieć powstawanie obrazów fraktalnych, nie potrzebujemy skomplikowanej wiedzy matematycznej. Najbardziej znane na świecie fraktale odkrył Polak – Wacław Sierpiński (1882–1969). Sierpiński był jednym z najwybitniejszych na świecie badaczy teorii mnogości, która zajmowała się zagadnieniem nieskończoności. Zajmował się między innymi zbiorami samopodobnymi, czyli takimi, których części są podobne do całości. Najpopularniejszymi fraktalami są Trójkąt oraz Dywan Sierpińskiego.

Jednym z pierwszych fraktali była Krzywa Kocha, inaczej Śnieżynka Kocha, opisana w 1904 roku przez szwedzkiego matematyka Helge von Kocha. Ten bardzo ciekawy fraktal powstaje przez podzielenie każdego boku trójkąta równobocznego na 3 części, usunięcie środkowej części i dorysowanie w to miejsce kolejnego trójkąta o wielkości takiej jak pozostałe.

Istnieją też fraktale trójwymiarowe – Piramida Sierpińskiego czy Kostka Mengera.

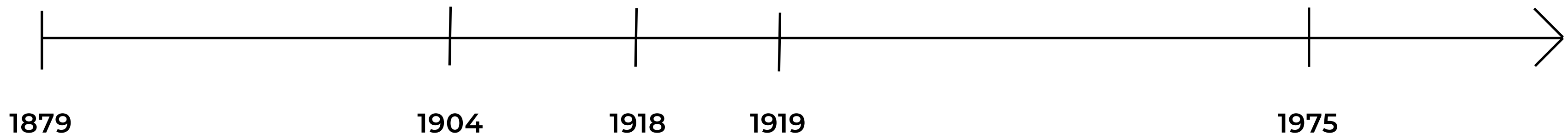
Źródło: Tony Crilly, „50 teorii matematyki, które powinieneś znać"

Geometria fraktalna – co to? po co?

Geometria euklidesowa, której uczymy się w szkole, zajmuje się figurami o idealnych kształtach – proste, kwadraty, trójkąty, wielokąty, okręgi. Niestety w rzeczywistości występują one niezwykle rzadko. Na przykład mówimy, że Ziemia jest kulą, choć doskonale wiemy, że nią nie jest. Granica państwa czy linia brzegowa na coraz dokładniejszej mapie są coraz dłuższe. Jak więc obliczyć otaczające nas formy o nieidealnych kształtach?

Taką możliwość daje nam właśnie geometria fraktalna. Używa się jej w opisie struktur, co do których geometria euklidesowa nie ma zastosowania, gdy chodzi o precyzyjne pomiary. Okazuje się, że dotyczy to w zasadzie wszystkich obiektów występujących w naturze.

KARTA PRACY NR 2



KARTA PRACY NR 3

Na podstawie przeczytanych tekstów oraz obejrzanego filmu odpowiedz na poniższe pytania. Możesz korzystać z tekstu źródłowego.

- Co to jest fraktal?
- Co to jest geometria fraktalna?
- Który z polskich matematyków zajmował się fraktalami?
  W jakich latach to było?
- Dzięki komu nauka o fraktalach stała się ważną dziedziną matematyki?
  W którym wieku to nastąpiło?
- Wymień kilka najpopularniejszych fraktali wraz z nazwiskami ich autorów.
- Jaka jest zasada powstawania fraktali?
- Do czego można zastosować wiedzę o fraktalach?

KARTA PRACY NR 4

KARTA PRACY NR 5

Spiski i szyfry, czyli historia z matematyką za pan brat

Kamil Paździor i Ewa Szmytkiewicz

Poruszane tematy

historia szyfrów, kryptologia, elementy programowania

Przedmiot

matematyka

Wiek uczniów

IV-VIII klasa szkoły podstawowej, druga godzina zajęć zalecana dla grup starszych lub zaawansowanych

Możliwość współpracy z nauczycielami

historii, informatyki

Zarezerwuj czas

2 x 45 minut, zadania można także wykorzystywać jako rozgrzewkę na różne okazje. Mogą stać się również podstawą do zorganizowania szkolnej olimpiady kryptologicznej lub międzyklasowego turnieju

Poproś uczniów o przeczytanie

- Marcin Bójko: „Złamali szyfr „nie do złamania" i skrócili wojnę o dwa lata", GW, 12.04.2019
- Bogdan Piotrowski: „Misja: rozpracować Enigmę. Jak udało się znaleźć trzech genialnych studentów matematyki, którzy dokonali niemożliwego", GW, 11.03.2019

Przygotuj przed lekcją

- linki lub wydrukowane artykuły z Gazety Wyborczej,
- wydrukowane Karty Pracy dla każdej grupy,
- papierowe paski, czyste kartki, w ostatnim ćwiczeniu można także skorzystać ze smartfonów lub komputerów.

Krótki opis zadania i cele zajęć

Uczniowie poznają historię kryptologii, rolę jaką odegrali w niej Polacy oraz techniki szyfrowania. Dodatkowo mają możliwość pracy zespołowej, rozwijają kreatywność i umiejętność krytycznego myślenia. Celem zajęć jest również rozbudzenie ciekawości poznawczej uczniów. Zadania kształtują umiejętność pracy z tekstem oraz kompetencje matematyczne i pogłębiają wiedzę historyczną.

Opis zajęć

Wprowadzenie do zajęć

Na początku lekcji, w ramach rozgrzewki, poproś uczniów, aby w ciągu 10 sekund napisali na papierowych paskach po dwa hasła do logowania. Podkreśl, by to nie były hasła, których naprawdę używają. Wrzuć hasła do koszyka. Podziel klasę na 3-osobowe grupy. Wylosuj dla każdej grupy równą liczbę kartek z hasłami i poproś uczniów, aby spróbowali odgadnąć, kto jest ich autorem. Zapisuj wyniki, by ustalić, która grupa wygrała. Zapytaj uczniów, co ułatwiało, a co utrudniało im zgadywanie. Możesz też sprawdzić siłę hasła, wykorzystując jedną z aplikacji (np. dobrehaslo.pl – > sprawdź hasło).

Wyjaśnij uczniom, że celem tego ćwiczenia było zwrócenie im uwagi na powszechność i wagę szyfrowania we współczesnym świecie. Zapytaj, w jakich dziedzinach wiedza o kodowaniu jest obecnie niezbędna. Przekaż, że historia kryptologii sięga starożytności, a na tych zajęciach mają nie tylko ją poznać, lecz także nauczyć się kilku metod szyfrowania. Możesz wykorzystać poniższe wprowadzenie.

Wprowadzenie historyczne i matematyczne

Od niepamiętnych czasów niezrozumiałe lub tajemnicze komunikaty i znaki budziły w ludziach ciekawość i potrzebę odkrycia ich znaczenia. Niektóre były na tyle stare, że nikt już nie pamiętał, jak je odczytywać. Tak było z hieroglifami, które były zagadką dla Aleksandra Macedońskiego, Juliusza Cezara, a także królowej Kleopatry. Inne teksty szyfrowano jednak specjalnie – aby nikt nieupoważniony nie mógł ich odczytać. Historia zmagań tych, którzy próbowali zaszyfrować informację i tych, którzy usiłowali ją odczytać to fascynująca przygoda intelektualna. Współcześnie z szyfrów korzystamy wszyscy, często nie zdając sobie z tego sprawy. Smartfon, bankomat, walizka, telewizja kablowa, przeglądarka internetowa, kod kreskowy czy kod QR działają w oparciu o algorytmy, które są rodzajem szyfrowania.

Tymczasem w matematyce patrzymy na szyfry jak na pewnego rodzaju kod i element programowania. Zastąpienie liter innymi lub wprowadzenie specjalnego wzoru to tylko niektóre przykłady. Oczywiście nie wszystkie szyfry opierają się na prostych formułach. Podczas II wojny światowej metody łamania szyfrów polegały głównie na analizie liter i słów, które występowały w tekście. Jednak niemiecka maszyna szyfrująca Enigma okazała się tak skomplikowana, że wojsko poprosiło o pomoc matematyków. Złamać szyfr Enigmy udało się trzem polskim naukowcom – Marianowi Rejewskiemu, Jerzemu Różyckiemu i Henrykowi Zygalskiemu. Ich odkrycie alianci wykorzystali, aby odczytywać niemiecką korespondencję, co przyspieszyło zakończenie wojny.

W czasie lekcji

Powiedz uczniom, że na tych i następnych zajęciach poznają kilka rodzajów szyfrów oraz dowiedzą się, jak je tworzyć i rozszyfrowywać.

Następnie poproś uczniów, aby odpowiedzieli na pytania zawarte w Karcie Pracy nr 1. W trakcie tego zadania uczniowie mogą wracać do przeczytanych w domu artykułów Gazety Wyborczej. Wyjaśnij, że sprawdzają one umiejętność rozumienia tekstów i wyszukiwania informacji. Szczególną uwagę zwróć na odpowiedzi na pytania, które dotyczą sposobu działania Enigmy. Następne zadania matematyczne z Karty Pracy nr 2 mają nie tylko przybliżyć problemy, z jakimi zmagali się kryptolodzy, aby złamać szyfr, ale też pomóc uczniom podążyć ich śladem.

Podziel uczniów na 3-4 osobowe grupy i rozdaj im wydrukowane Karty Pracy nr 2. Wyjaśnij, że w ćwiczeniach znajdą opis metody kodowania i zadania do wykonania. Uczniowie poznają szyfr Juliusza Cezara (Ćwiczenie 1). Następne ćwiczenia możesz wykorzystać na kolejnej lekcji lub przy innych okazjach.

Podsumuj pierwszą lekcję. Zapytaj uczniów, na czym polega podobieństwo między szyfrem Cezara a Enigmą, a na czym różnica między nimi. Na jakie problemy natrafia kryptolog? Czy chcieliby zawodowo zajmować się kryptologią i dlaczego?

Kolejne zajęcia

Na drugich zajęciach ponownie rozdaj uczniom Kartę Pracy nr 2. Wyjaśnij, że w tej części zajęć poznają i przećwiczą używane w historii szyfry, w tym najprostsze wersje Enigmy. Dzięki tworzeniu szyfrów uczniowie rozwiną swoją dociekliwość i kreatywność. Sprawdź, czy uczniowie pamiętają, na czym polega różnica między szyfrem Cezara a Enigmą. Zapytaj też, czy pamiętają, jak nazywali się polscy kryptolodzy, którzy zrekonstruowali Enigmę i jaki wpływ miała ich praca na losy II wojny światowej. Podziel klasę ponownie na 3-4 osobowe grupy, rozdaj im czyste kartki i wykonaj Ćwiczenia 2-5. Aby utrwalić wiedzę, możecie powtórzyć każde zadanie.

Możliwe modyfikacje zadania

- Zajęcia możesz urozmaicić krótkimi filmami z cyklu „Historia kryptografii" z kanału KhanAcademyPoPolsku w serwisie YouTube lub najnowszymi informacjami i ciekawostkami szpiegowskimi (np. ze strony spyshop.pl/blog).
- Aby wzbogacić zadania domowe i ćwiczenia, możesz zakodować polecenia tekstowe ustalonym z klasą szyfrem.
- Ćwiczenia nr 1, 2, 4 oraz Zadania nr 1, 2, 3, 4 możesz również wykorzystać, aby przeprowadzić konkurs/turniej w klasie lub szkole:
- Zbierz grupę uczniów, którzy przygotują klucze kodowe i zaszyfrowane zadania. Mogą to zrobić starsi uczniowie dla młodszych.
- Sprawdź poprawność stworzonych przez grupy zadań i kluczy kodowych.
- Określ czas trwania zawodów.
- Wydrukuj zadania dla zawodników lub drużyn.
- Przeprowadź turniej. Nagradzaj uczniów zarówno za poprawność odczytania tekstu (0-1 p. za zadanie), jak i szybkość rozwiązania (3p. dla najszybszej grupy, 2 i 1 dla kolejnych).

√ Zadanie 1

Zapiszcie za pomocą szyfru Cezara wymyślone przez Was zdanie – przekażcie wiadomość innej grupie. Dla utrudnienia możecie zapisać zdanie w języku obcym.

KARTA PRACY NR 1

„Polecenia do tekstów”

- Korzystając z internetu, wyjaśnijcie sformułowania, których użył autor tekstu oraz napiszcie, jakie jest ich znaczenie i pochodzenie: „ułańska fantazja”, „kamień milowy”, „tytaniczne zadanie”, „łut szczęścia”, „puścić parę z ust”, „otworzyć oczy”, „pod czyjeś dyktando”.
- Na czym polega statystyka lingwistyczna?
- Opiszcie w punktach etapy dekodowania informacji od momentu, gdy szyfrant dostaje klucz kodowy Enigmy.
- W jakim celu polscy matematycy przygotowali zestaw perforowanych arkuszy – płacht?
- Dlaczego rząd brytyjski i polscy matematycy tak długo milczeli o sprawie Enigmy? Dlaczego świat tak późno dowiedział się, jakie znaczenie miało złamanie jej szyfrów?
- Wypiszcie miejscowości, w których studiował lub wykładał Zdzisław Krygowski – twórca poznańskiej szkoły matematyki.
- Wyjaśnijcie, dlaczego Biuro Szyfrów Wojska Polskiego zorganizowało tajny kurs kryptologii na Uniwersytecie w Poznaniu.
- Kiedy i gdzie zmarli profesor Krygowski oraz jego trzej słynni studenci?

KARTA PRACY NR 2

„Kodowanie i dekodowanie”

Ćwiczenie 1 – „Szyfr Cezara”

Poznajcie szyfr Juliusza Cezara. To chyba najstarszy i najprostszy szyfr, w którym każdą literę zastępuje się inną (przesunięcie o 3 znaki- w prawo bądź w lewo). Cezar używał tego szyfru w korespondencji ze swoimi przyjaciółmi. Ustalcie, w którą stronę przesuwano znaki. W tym celu skorzystajcie z tabelki pomocniczej. Jak uważacie, czy łatwo taki szyfr złamać?

TEKST	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
SZYFR	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Rozszyfruj słowa: **MXOLXVC FHCDU**

√ Zadanie 2

Wzorując się na szyfrze Cezara, stwórzcie swój własny, w którym zachowacie kolejność liter alfabetu i przesuniecie je o dowolną liczbę znaków. Zakodujcie w ten sposób wymyślone przez siebie zdanie i przekażcie innej grupie, aby je rozszyfrowała. Zdanie musi rozpoczynać się od słowa „Witaj” – pomoże to pozostałym grupom ustalić zasadę, jaką stosowaliście do zakodowania wiadomości. Zanotujcie, ile czasu minęło, zanim odczytaliście tajną wiadomość.

Ćwiczenie 2 „Szyfr Polibiusza”

Innym starożytnym sposobem szyfrowania jest szyfr Polibiusza – greckiego historyka, który żył przed naszą erą. W jego szyfrze do każdej litery przypisujemy liczbę, według poniższej tabeli. Pierwsza cyfra jest numerem wiersza, druga – kolumny. Na podstawie tych wskazówek, rozszyfrujcie następujące słowo:

32 11 44 15 32 11 44 54 25 11

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I/J	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

√ Zadanie 3

Za pomocą szyfru Polibiusza zakodujcie słowa: **historia, szyfrowanie, kryptografia.**

√ Zadanie 4

Teraz Wasza kolej – stwórzcie szyfr z polskich liter. Przeczytajcie polecenia bardzo uważnie i stwórzcie na kartce własną szachownicę. Uzupełnijcie białe pola trzydziestoma dwoma polskimi literami (!) w kolejności alfabetycznej, rozpoczynając jednak od dowolnej litery. Zakodujcie za pomocą swojego szyfru zdanie rozpoczynające się od słowa „Cześć”. Zapiszcie je na pasku papieru i przekażcie innej grupie, aby je odczytała. Każda z grup powinna rozszyfrować tekst, rekonstruując najpierw tabelę. Sprawdźcie czy wykonaliście zadanie poprawnie. Co sprawiło Wam największą trudność? Jeśli nie udało się poprawnie odpowiedzieć, ustalcie dlaczego. W jaki sposób możliwe jest rozszyfrowanie zdania, mimo że nie zna się jego pierwszego słowa?

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								

Ćwiczenie 3. „Szyfr Playfaira”

Szyfr ten wymyślił w 1854 roku angielski wynalazca Charles Wheatstone. Nazwa szyfru pochodzi jednak od nazwiska szkockiego naukowca i parlamentarzysty Lyona Playfaira. To właśnie z jego inicjatywy armia brytyjska użyła szyfru podczas drugiej wojny burskiej (1899-1902). Szyfr Playfaira polega na zastąpieniu par liter inną parą liter.

W tabeli ustawiamy losowo 25 liter bez polskich znaków (pomijamy też Q). Często możemy spotkać tabelę, gdzie Q występuje, natomiast I oraz J zapisane są w jednej komórce. Przykładowe klucze znajdziemy na stronie calcoolator.pl/szyfr-playfair

G	A	M	I	W
P	C	R	O	K
D	L	S	N	T
E	Y	J	X	F
V	Z	B	U	H

TABLICA KODOWA

Jak myślicie, na jakiej zasadzie opiera się ten szyfr? Ile różnych tabel można utworzyć? Przedyskutujcie to w grupie. W Zadaniu 5 odkryjecie, jak działa ten szyfr.

√ Zadanie 5

Wykorzystując podaną na stronie obok tablicę kodową, zakodowano słowo **MATEMATYKA.**

MA TE MA TY KA

IM DF IM LF CW

Jaka jest zasada tego szyfru? Podajcie kilka przykładów.

√ Zadanie 6

Stwórzcie własną tablicę kodową i zaszyfrujcie wiadomość. Przekażcie wiadomość innej grupie, aby ją rozszyfrowała – możecie na początku spróbować bez tablicy kodowej, a w razie niepowodzenia z podpowiedzią.

Ćwiczenie 4. „Szyfr harcerski”

Poznaj szyfr harcerski. Działa on tak, że podmieniamy litery w szyfrowanym wyrazie. Słowo-klucz to np. MA-DE-RY-PO-LU-KI, albo inne łatwe do zapamiętania pary liter złożone ze spółgłoski i samogłoski. Jeśli w wyrazie jest litera O – popatrzcie na klucz i zastąpcie ją stojącą obok literą P i odwrotnie. Pomińcie litery, których nie ma w kluczu – można będzie się ich domyślić. Stwórzcie własne słowo-klucz i zaszyfrujcie wiadomość. Ciekawe, czy pozostałe grupy odgadną je, mimo brakujących liter.

√ Zadanie 7

Puśćcie wodze wyobraźni i spróbujcie stworzyć własny szyfr. W jaki sposób się do tego zabrać? Możliwości są nieskończone! Na przykład alfabet Morse’a, używany przez marynarzy jest rodzajem szyfru. Możecie np. kropki i kreski zastąpić innymi znakami, a do odszyfrowania użyć tłumacza on-line (alfabetmorsa.pl). Ten sposób przypomina system binarny, który jest podstawą działania komputerów – występują w nim tylko dwie cyfry: 0 i 1. Możecie zainspirować się też innymi rozwiązaniami – na przykład czcionką Wingdings, która wygląda jak hieroglify. Wykorzystajcie podane informacje i stwórzcie własny system szyfrowania. Skonstruujcie kod, zaszyfrujcie za jego pomocą wiadomość, a następnie przekażcie innej grupie kod z wiadomością. Zastanówcie się, jakie są zalety i wady wymyślonej przez Was metody szyfrowania.

Ćwiczenie 5. „Statystyka lingwistyczna”

Statystyka lingwistyczna (językowa) wykorzystuje wiedzę o częstotliwości występowania liter i słów do kryptoanalizy. Sprawdźcie, jaka litera występuje w polskich tekstach najczęściej. Zaznaczcie dowolny długi fragment tekstu w edytorze. Następnie za pomocą klawiszy ctrl+f sprawdzajcie, ile w danym fragmencie jest liter A, B, N czy Z. Możecie też użyć do tych obliczeń prostego darmowego programu np. Program Poe. W kolejnym kroku w Wikipedii wyszukajcie hasło „Alfabet polski”. Pod hasłem odszukajcie sekcję „Częstość występowania liter”. Sprawdźcie, czy Wasze wyniki zgadzają się z danymi z tabeli.

√ Zadanie 8

W złamaniu wielu szyfrów, również słynnej Enigmy, pomogła wiedza o tym, że w zakodowanych tekstach pojawiają się słowa-klucze. W konkretnych wiadomościach pojawiały się często takie słowa jak „rozkaz”, „pogoda”, „i”, „oraz”, „armia”, „generał”. Przeczytajcie fragment dowolnego podręcznika albo własnych notatek z lekcji. Które słowa występują najczęściej i mogłyby pomóc kryptologowi?

√ Zadanie 9

Jeśli chcecie wysłać poufną wiadomość, możecie zaszyfrować maila. W serwisie Gmail skorzystajcie z opcji „Włącz tryb poufny" w prawym dolnym rogu okna wiadomości. Ustawcie datę ważności i kod dostępu, który będzie wysłany SMS-em. Wyślijcie wiadomość do innego ucznia i sprawdźcie, czy właściwie ją zdekodował.

Odpowiedzi dla nauczyciela do Karty Pracy nr 2

Ćwiczenie 1:

Juliusz Cezar.

Ćwiczenie 2:

Matematyka.

Zadanie 3:

Historia: 23 24 43 44 34 42 24 11

SZYFROWANIE: 43 55 54 21 42 24 52 11 33 24 15

KRYPTOGRAFIA: 25 42 54 35

Podpowiedź dla uczniów

Zadanie 5:

Szyfr polega na zastąpieniu par liter (MA) inną parą liter zgodnie z tablicą kodową. Dzielimy tekst, który będziemy szyfrować na pary liter. Każda z par powinna składać się z dwóch różnych liter – tylko takimi tekstami się zajmiemy. Musimy uwzględnić następujące sytuacje:

- obie litery są w tym samym wierszu, np. kodujemy pary liter: MA – zastępujemy parą liter, która sąsiaduje z naszymi literami z prawej strony. M zamieniamy na I, A zamieniamy na M: MA? IM, analogicznie LN ? ST. Jeśli jedna z liter znajduje się na końcu wiersza, zastępujemy ją pierwszą literą z wiersza, np. LT?SD.
- obie litery są w tej samej kolumnie – zastępujemy je tymi, które leżą pod nimi, np. MJ?RB. Jeśli jedna z liter znajduje się na końcu kolumny, zastępujemy ją pierwszą literą z tej kolumny, np. RB?SM.
- w pozostałych przypadkach szyfrujemy literami „na krzyż" – przykład w tabeli: TE?DF, CH ? KZ.

Ćwiczenie 4:

Jeśli klucz to: MA-DE-RY-PO-LU-KI, to wiadomość: ULKD AMDARID odczytujemy (zamieniając litery w parach) jako: LUIE MAEMAYKE. Choć brakuje liter B, T oraz Ę, można się domyślić, że chodzi o: LUBIĘ MATEMATYKĘ. Klucz łatwo zapamiętać, natomiast sztuczna inteligencja musi być zaawansowana by domyśleć się odpowiedzi.

Notatki

Atomowa (bez)nadzieja

Kamil Paździor

Poruszane tematy

nauka jako źródło osiągnięć i zagrożeń, wkład Polaków w rozwój nauki, lwowska szkoła matematyki, powstanie bomby atomowej i wodorowej, dylematy etyczne związane z energią jądrową

Wiek uczniów

V-VIII klasa szkoły podstawowej, I-IV klasa szkoły ponadpodstawowej

Zarezerwuj czas

2 x 45 minut

Przedmiot

historia

Możliwość współpracy z nauczycielami

matematyki, fizyki, przyrody, wiedzy o społeczeństwie, geografii, edukacji dla bezpieczeństwa, godziny wychowawczej

Poproś uczniów o przeczytanie

- Marcin Bójko: „Stanisław Ulam Genialny lwowiak atomowiak. Dzięki niemu Ameryka zbudowała superbombę”, GW, 29.03.2019

Przygotuj przed lekcją

- wydrukowany artykuł lub link,
- wydrukowane fragmenty wspomnień S. Ulama,
- salę z dostępem do internetu lub wi-fi.

Krótki opis zadania i cele zajęć

Uczniowie pracują w grupach i wyszukują w internecie informacje dotyczące broni jądrowej. Poszerzają wiedzę zaczerpniętą z artykułu o Stanisławie Ulamie. Następnie podziel klasę na dwie grupy, które przeprowadzają debatę oksfordzką. Wyjaśnij uczniom, że będą pracowali w grupach, podobnie jak naukowcy, którzy są tematem lekcji. My pracujemy w szkole, oni pracowali w kawiarni, w środku miasta lub na pustynnym odludziu. Uczniowie poszukują oraz konstruują informacje oraz wykorzystują *technologie informacyjno-komunikacyjne.*

Opis zajęć

Przed zajęciami

Na pierwszych zajęciach lub w ramach zadania domowego, WebQuestu, daj uczniom do przeczytania artykuł z Gazety Wyborczej – „Stanisław Ulam Genialny lwowiak atomowiak. Dzięki niemu Ameryka zbudowała superbombę".

W czasie lekcji

Podziel uczniów na grupy 4–5 osobowe, z których każda rozwinie jeden z wątków artykułu. Wyjaśnij im, jak ważne jest, aby sprawdzać wiarygodności informacji (zaufany portal, podany autor i źródła informacji, potwierdzenie w innym źródle). Przed rozpoczęciem pracy zapoznaj uczniów z kryteriami oceny.

Przykładowe kryteria oceny artykułów napisanych przez uczniów

<u>Nauczyciel przyznaje uczniom punkty od 1 do 7 na podstawie:</u>

- rozwinięcia tematu,
- poprawności językowej,
- bibliografii i wiarygodności wykorzystanych źródeł,
- równego zaangażowania całej grupy.

<u>Uczniowie przyznają kolegom punkty od 1 do 7 za:</u>

- Pomysł na prezentację – czy forma mnie zainteresowała?
- Prezentację ustną – czy wypowiedź była zrozumiała i spójna? Czy grupa podzieliła wypowiedź między siebie?
- Czytelność argumentów lub informacji – czy rozumiem, co chcieli przekazać?

Zamiast podawać gotowe kryteria, możesz też zapytać uczniów o zdanie i wypracować autorskie kryteria oceny wspólnie z nimi.

Praca w grupach

Po ustaleniu kryteriów oceny, poproś uczniów o wylosowanie tematów artykułów, nad którymi będą pracować na lekcji lub w domu. Przykładowe tematy znajdziesz w Karcie Pracy nr 1.

Podkreśl, że wiedzę, którą zdobędą podczas pracy, wykorzystają na kolejnych zajęciach.

Omówienie

Na kolejnych zajęciach poproś uczniów, aby przedstawili informacje, do których dotarli w trakcie pracy nad artykułami. Wspólnie oceńcie pracę grup na podstawie wcześniej przyjętych kryteriów.

Debata – wykorzystajcie wiedzę w praktyce

Następnie zaproponuj uczniom debatę na wybrany temat. W każdym wypadku debata powinna dotyczyć jasno postawionej, budzącej kontrowersje tezy.

<u>Proponowane tezy debaty:</u>

- „Świat bez bomby atomowej byłby lepszy."
- „Świat potrzebuje energii jądrowej."
- „Polska powinna dysponować bombą atomową."
- „Użycie bomby atomowej jest formą terroryzmu."
- „Naukowcy są odpowiedzialni za skutki swoich odkryć i wynalazków."

Możesz wybrać krótką wymianę argumentów lub bardziej sformalizowaną formę – np. debatę oksfordzką albo za i przeciw. Zarówno w przypadku debaty oksfordzkiej, jak i za i przeciw podziel klasę na dwie drużyny, które następnie przygotują się do debaty, poszukując danych i argumentów. Jeśli to możliwe, zapewnij uczniom dwa odrębne pomieszczenia do pracy i zadbaj o dostęp do internetu (mogą być to komputery lub komórki).

Na tym etapie uczniowie wykorzystują i pogłębiają wiedzę zdobytą podczas pracy nad artykułami. Możesz zachęcić uczniów, żeby wzbogacili swoje wystąpienia, odwołując się do autorytetów. Niektórzy naukowcy, twórcy bomby atomowej po obu stronach żelaznej kurtyny, zdecydowanie opowiedzieli się za lub przeciw jej istnieniu. Niektórzy za swój sprzeciw lub ujawnienie tajemnic zapłacili ogromną cenę, inni zdobyli światowy szacunek lub nawet Nagrodę Nobla za swą postawę. Nie zabrakło wśród nich także Polaków. Możesz poprosić uczniów, żeby przed debatą dowiedzieli się więcej o niektórych postaciach:

- Józef Rotblat – naukowiec z polskim obywatelstwem, który pracował w Los Alamos nad amerykańską bombą atomową i otrzymał Nagrodę Nobla za działalność pacyfistyczną.
- Andriej Sacharow – współtwórca radzieckiej bomby wodorowej, przeciwnik zbrojeń i obrońca praw człowieka, prześladowany w ZSRR.
- Frédéric Joliot-Curie – zięć Marii Skłodowskiej, noblista, prowadził badania nad bronią atomową we Francji. Podpisał apel sztokholmski wzywający do zakazu produkcji broni atomowej, informował o swoich badaniach ZSRR.

Przeprowadzenie i podsumowanie debaty

Jeśli wybierzesz debatę *za i przeciw…*

Każda z grup uczniowskich będzie miała za zadanie opowiedzieć się za lub przeciw postawionej tezie. Możesz od początku podzielić uczniów na zwolenników i przeciwników tezy, albo zdecydować dopiero w ostatniej chwili, po której stronie będą musieli się opowiedzieć uczniowie. Debatę podsumuj głosowaniem.

Jeśli wybierzesz *debatę oksfordzką…*

W debacie oksfordzkiej również występują zwolennicy i przeciwnicy tezy, ale jej forma jest wyraźnie określona. Debata ma swojego marszałka i sekretarza, którzy powinni zajmować widoczne miejsce na sali obrad. Zespoły zwolenników i przeciwników tezy, liczące tyle samo osób, zajmują miejsca po prawej i lewej stronie stołu prezydialnego, krzesełka dla publiczności ustawione są po lewej i prawej stronie sali. Marszałek udziela głosu naprzemiennie zwolennikom i przeciwnikom tezy, przedstawiciele publiczności również mogą zabrać głos po każdej ze stron. Czas wystąpień jest ograniczony, sekretarz ma obowiązek pilnować przestrzegania czasu oraz dyscyplinować mówców. W trakcie debaty należy zaplanować dwie lub trzy przerwy, kiedy słuchacze mogą się przesiąść, zajmując miejsca po tej stronie sali, po której znajduje się zespół, który przekonał ich do swojej racji. Jeśli pod koniec debaty liczba osób jest zbliżona po obu stronach, można przeprowadzić anonimowe głosowanie, które wyłoni zwycięski zespół.

Podsumowanie

Debatę warto podsumować głosowaniem oraz Twoim eksperckim komentarzem. Wybierzcie zwycięską drużynę i mówców debaty. Wspólnie oceńcie jakość merytoryczną wystąpienia – wyszukane w internecie informacje, odniesienia do autorytetów. Porozmawiajcie o jakości retorycznej przemówień i o tym, czy wypowiedzi były spójne i ciekawe. Zwróćcie również uwagę na kulturę rozmowy – słuchanie rozmówców, nie obrażanie się nawzajem, etc.

Notatki

KARTA PRACY NR 1A

Grupa I

„Kawiarnia Szkocka"

Napiszcie krótki artykuł – pół strony A4, czcionka Times New Roman 12, w którym wyjaśnicie:

- czym była tzw. lwowska szkoła matematyki,
- w jaki sposób pracowano w Kawiarni Szkocka,
- jaka była przynależność państwowa Lwowa w latach życia S. Ulama,
- co się stało w trakcie wojny z matematykami, którzy tak jak S. Ulam bywali w tej kawiarni.

KARTA PRACY NR 1B

Grupa II

„Projekt Manhattan”

Napiszcie krótki artykuł – pół strony A4, czcionka Times New Roman 12, w którym wyjaśnicie:

- dlaczego USA zdecydowały się na realizację tego projektu,
- na czym polegał projekt,
- jakie były jego koszty oraz ilu naukowców i z jakich krajów zaangażowano,
- dlaczego urodzona w Los Alamos córka S. Ulama miała w akcie urodzenia numer skrzynki pocztowej (PO Box 1663) zamiast miejsca narodzin.

KARTA PRACY NR 1C

Grupa III

„Little Boy i Fat Man”

Napiszcie krótki artykuł – pół strony A4, czcionka Times New Roman 12,
w którym wyjaśnicie:

- kiedy i gdzie użyto obu bomb,
- ile było ofiar,
- dlaczego prezydent H. Truman zdecydował się na użycie bomby atomowej,
- omówcie przynajmniej trzy argumenty dotyczące żołnierzy USA, Japonii i ZSRR które go do tego skłoniły.
- wyjaśnijcie tytuł artykułu.

KARTA PRACY NR 1D

Grupa IV

„Od Borsuka do Monte Carlo"

Napiszcie krótki artykuł – pół strony A4, czcionka Times New Roman 12, w którym wyjaśnicie:

- czego dotyczy twierdzenie Borsuka-Ulama,
- czym zajmował się Karol Borsuk w czasie wojny,
- na czym polega gra „Superfarmer",
- czego dotyczy „Metoda Monte Carlo", do czego jest dziś wykorzystywana i dlaczego nosi tak tajemniczy kryptonim.

KARTA PRACY NR 1E

Grupa V

„Superbomba"

Napiszcie krótki artykuł – pół strony A4, czcionka Times New Roman 12, w którym wyjaśnicie:

- dlaczego USA zdecydowały o kontynuowaniu badań nad bombami jądrowymi po wojnie,
- na czym polegał wkład S. Ulama w budowę bomby wodorowej,
- dlaczego część informacji o tych badaniach nadal jest tajna,
- jakie państwa dysponują dziś bronią jądrową i dlaczego jest dziś kilkakrotnie mniej ładunków jądrowych niż w l. 80. XX w.

KARTA PRACY NR 2

„Wspomnienia Stanisława Ulama"

W swoich wspomnieniach Stanisław Ulam pisał m.in.: „Pamiętam, że jedno z moich spotkań z Mazurem i Banachem w kawiarni Szkockiej trwało siedemnaście godzin, nie licząc przerw na posiłki. (...) Sądzę, że te wielogodzinne kawiarniane dyskusje z Banachem, a częściej z Banachem i Mazurem, były czymś unikalnym. Nigdzie i nigdy nie zdarzyło mi się nic, co by przewyższało, dorównało lub choćby zbliżyło się do skali i natężenia naszej ówczesnej współpracy – z wyjątkiem być może Los Alamos w latach wojny".

„W tym czasie dużo mówiło się w Los Alamos o możliwości wybuchu nowych wojen i o przyszłym uzbrojeniu. Ja opowiadałem się za kontynuowaniem polityki zbrojeń, choćby dlatego, żeby nie dać się prześcignąć innym krajom. Johnny (von Neumannem – dop. KP) oraz inni ludzie niepokoili się, że Rosjanie mogą zdobyć lub skonstruować bomby jądrowe i obawiali się zaostrzenia stosunków między Rosją a Europą Zachodnią. Zapatrywania Johnny'ego bliskie były w tym czasie poglądom osób, nazywanych jastrzębiami (choć określenia jastrzębie i gołębie nie weszły jeszcze do powszechnego użytku). (...) Moje poglądy leżały gdzieś pośrodku pomiędzy jego sposobem myślenia, a zapatrywaniami tych fizyków, którzy mieli nadzieję, że broń jądrową będzie nadzorować społeczność międzynarodowa. Uważałem, że to naiwne spodziewać się, iż wilk położy się obok owcy: przeczuwałem, że zawarcie międzynarodowych umów o jakimkolwiek znaczeniu zajmie wiele lat. Nie można było mieć nadziei na nagłą zmianę sposobu myślenia ludzi lub samej ludzkiej natury. (...) Mówiłem sobie, że zrzucenie jednej bomby jest równe nalotowi tysiąca samolotów. Jednak nie wiedziałem jeszcze, że moc takiej bomby może być wielokrotnie zwiększona i że będzie możliwa produkcja tysięcy takich bomb. Nie czułem żadnych wyrzutów sumienia z powodu powrotu do laboratorium i dalszej pracy nad bombami atomowymi. Scharakteryzowałbym swoją postawę jako pośrednią pomiędzy zupełnie naiwnym idealizmem i całkowitym szowinizmem. Kierowałem się instynktem (lub może jego brakiem) i interesowałem się głównie naukową stroną tej pracy."

„Prawdopodobnie przeczuwałem również, że techniczne następstwa odkryć naukowych są nieuniknione. I wreszcie, wierzyłem, że koniec końców ludzkość wykaże dobrą wolę. Ustawa o energii atomowej, w ostatecznie przyjętej formie, była znacznie bardziej zadowalająca niż początkowe propozycje pozostawienia badań nad energią atomową wyłącznie w rękach armii. Françoise (żona Ulma – dop. KP) miała do tego wszystkiego bardziej emocjonalny stosunek i silniej odczuwała moralną dwuznaczność całej sytuacji. Zawsze uważałem, że uczeni muszą zajmować się sprawami techniki, gdyż w przeciwnym wypadku mogą one dostać się w ręce niebezpiecznych i fanatycznych reakcjonistów. Z drugiej strony, pomysł zwiększania w nieskończoność liczby bomb też nie miał sensu, ponieważ już niewielka część istniejącego arsenału wystarczyłaby na zniszczenie wszystkich zamieszkałych ośrodków na świecie, nawet jeśli większość pocisków nie dotrze do celu. Nie wierzyłem również w radziecką inwazję w Europie Zachodniej, choć obawa przed nią była przypuszczalnie jednym z powodów eskalacji zbrojeń.”

„W przeciwieństwie do tych ludzi, którzy zawsze gwałtownie sprzeciwiali się bombie z powodów politycznych, moralnych lub społecznych, ja sam nigdy nie wątpiłem w sens pracy czysto teoretycznej. Nie uważałem, że obliczenia dotyczące zjawisk fizycznych mogą być niemoralne. Uzasadnienie strategiczne stanowi zupełnie inny aspekt problemu – tu tkwi sedno jednej z najpoważniejszych kwestii historycznych, politycznych i społecznych. Ma to niewiele wspólnego z samymi zagadnieniami fizycznymi i technicznymi. Nawet najprostsze obliczenia w najczystszej matematyce mogą mieć straszne konsekwencje. Bez rachunku różniczkowego nie mogłaby istnieć cała współczesna technika. Czy w związku z tym rachunek różniczkowy jest zły?

Uważałem, że nie należy rozpoczynać projektów, które mogą doprowadzić do tragicznych następstw. Ale gdy takie niebezpieczeństwo już zaistniało, czy nie lepiej sprawdzić, czy jest ono rzeczywiste, czy nie? Jeszcze większą próżnością jest uważać, że bez naszego udziału praca w ogóle nie mogłaby zostać wykonana. Byłem całkowicie przekonany, że bezpieczniej jest pozostawić te sprawy naukowcom i ludziom potrafiącym dokonywać obiektywnych ocen, niż oddać je w ręce demagogów i szowinistów lub nawet polityków o dobrych chęciach, lecz nie zorientowanych w zagadnieniach technicznych. A kiedy zastanawiałem się nad ostatecznymi skutkami, nie wydawały mi się one jakościowo odmienne od skutków skonstruowania istniejących już bomb atomowych. Po wojnie wiadomo było, że można wyprodukować bomby atomowe ogromnych rozmiarów. Ładunki termojądrowe nie były niczym szczególnie oryginalnym ani wyjątkowym. Wcześniej czy później zostałyby wynalezione i zbudowane przez Rosjan lub kogoś innego. Implikacje polityczne były niejasne, mimo wielkiej wrzawy po obu stronach. Świadomość, że pojedyncze bomby są w stanie zniszczyć nawet największe miasta, mogła przyczynić się do zmniejszenia prawdopodobieństwa wybuchu wojny totalnej w jeszcze większym stopniu niż fakt istnienia bomb atomowych, z ich przerażającą niszczycielską siłą."

Po śmierci męża Françoise Ulam tak wspominała te dylematy moralne: „Kiedy wspominałam o swoich obiekcjach związanych z życiem w ośrodku prac nad bombą wodorową, Stan zapewniał mnie, że – jeśli nie zdarzy się żaden wypadek – bomba wodorowa uczyni wojnę niemożliwą. Wprawdzie zgadzał się też z tym, że jest już zbyt wiele bomb, ale nie sądził, by Rosja wkroczyła do Europy Zachodniej, choć to zagrożenie jest jednym z przypuszczalnych powodów hiperzbrojeń". (Miał jak zwykle rację, co widać w świetle dzisiejszych wydarzeń).

Były to czasy, w których kwestia nauki i moralności nabrała nowego znaczenia. Pytany o etykę nauki, twierdził stanowczo, że nauka koniecznie musi szukać prawdy, niezależnie od konsekwencji. Czegóż dokonaliby Archimedes lub Newton, argumentował, jeśli zamartwialiby się potencjalnymi skutkami swoich odkryć? Bez rachunku różniczkowego i całkowego nie powstałaby współczesna nauka. Przyznawał oczywiście, że dużo zmieniło się od czasów, kiedy Poincaré mógł powiedzieć, iż nie istnieje konflikt pomiędzy moralnością a nauką, ponieważ celem ich obu jest udoskonalenie ludzkości. Energia jądrowa i możliwość manipulacji genetycznych ogromnie skomplikowały to zagadnienie. Szybko jednak wymieniał pożyteczne aspekty energii jądrowej i cudów inżynierii genetycznej, mądrze wykorzystanej, twierdząc, że odpowiedzialność za decyzje o ich użyciu spoczywa na społeczeństwie. Podkreślał przy tym, że obowiązkiem naukowców jest informowanie ogółu o swoich odkryciach."

Stanisław M. Ulam „Przygody matematyka", przeł. [z ang.] Agnieszka Górnicka. – Warszawa : Prószyński i S-ka, 1996.

Lwowska Szkoła Matematyczna w naszej klasie

Justyna Franczak

Poruszane tematy

rozwiązywanie zadań na dowodzenie z wybranego przez nauczyciela działu, wzajemne uczenie się, sylwetki znaczących polskich matematyków

Wiek uczniów

VI-VIII klasa szkoły podstawowej

Możliwość współpracy z nauczycielami

języka polskiego, godziny wychowawczej

Przedmiot

matematyka

Zarezerwuj czas

45 minut

Poproś uczniów o przeczytanie

- Mariusz Urbanek: „Lwowscy wirtuozi całek i różniczek”, GW, 04.03.2019

Przygotuj przed lekcją

- Przykłady zadań dla grup – *problematów*. Możesz je wybrać z Karty Pracy nr 1 „Udowodnij, że…. Zadania-*problematy*”, którą znajdziesz na końcu scenariusza;
- Stanowiska do pracy w grupach. Połącz ławki pokryte szarym papierem i umieść na nich wybrane zadania-*problematy*. Stanowiska są podobne do miejsc, w których pracowali matematycy ze Lwowa. Dowodzili oni swoich tez, zapisując dowody na stolikach w kawiarni. Spośród przykładowych zadań, wybierz właściwe dla danych uczniów.
- Zapisz je na arkuszach papieru w formie *problematów* do rozwiązania (możesz też wydrukować wybrane zadania-*problematy* i nakleić je na arkuszach). Wpisz na arkuszu treść wybranego zadania/zadań, datę, nazwiska kilku matematyków tzw. szkoły lwowskiej. Dla każdej grupy wybierz inny zestaw nazwisk. Zostaw miejsce na dopisanie do nich nazwisk uczniów danej grupy oraz miejsce do zapisywania rozwiązań zadań-*problematów*.

- Markery w dwóch kolorach. Czarnym uczniowie będą rozwiązywali *problematy,* zielonym będą udzielali sobie nawzajem informacji zwrotnej.
- Identyfikatory z nazwiskami sławnych matematyków, którzy spotykali się w kawiarni Szkockiej we Lwowie (np. Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Stanisław Ulam, Stanisław Mazur, Herman Auerbach, Marek Kac, Stefan Kaczmarz, Antoni Łomnicki, Władysław Orlicz, Stanisław Ruziewicz, Stanisław Saks, Juliusz Schauder, Włodzimierz Stożek).
- Patyczki do losowania z nazwiskami matematyków zapisanych na identyfikatorach.
- *Metodniki/Światła* – kartoniki w kolorze zielonym, żółtym oraz czerwonym, tyle, ile jest grup.
- Przykładowe rozwiązania *problematów.* Mogą przydać się uczniom w udzielaniu informacji zwrotnej kolegom.
- Nagrody za rozwiązanie *problematu.* W zależności od używanej metody możesz wybrać: możliwość wyboru zadania domowego; możliwość ułożenia swojego zadania do sprawdzianu/kartkówki; możliwość skorzystania z podpowiedzi podczas sprawdzianu; plusy, pieczątki, oceny sumujące, drobne nagrody rzeczowe – kolorowe ołówki, linijki, gumki do mazania, etc.
- Dodatkowe zadania-*problematy* dla grup, które będą pracowały w szybszym tempie niż pozostali uczniowie.
- Samoprzylepne karteczki w trzech kolorach – zielone, żółte, czerwone.

Krótki opis zadania i cele zajęć

Uczniowie pracują jak znani lwowscy matematycy i rozwiązują problematy dotyczące wybranego działu. Podczas zajęć uczniowie doskonalą umiejętność rozwiązywania zadań na dowodzenie/udowadnianie, rozwijają myślenie matematyczne oraz umiejętność myślenia przyczynowo-skutkowego. Doskonalą też umiejętność społecznego uczenia się, które polega na pracy w małych zespołach, wzajemnym uczeniu się, udzielaniu koleżeńskiej informacji zwrotnej. Zajęcia wzmacniają zainteresowanie zawodem naukowca i pomagają propagować postawę uczenia się przez całe życie.

Opis zajęć

Przed zajęciami

Poproś uczniów o zapoznanie się przed lekcją z sylwetkami i osiągnięciami polskich matematyków – Hugo Steinhausa i Stefana Banacha na podstawie artykułu „Lwowscy wirtuozi całek i różniczek". Uczniowie mogą pracować nad tekstem samodzielnie w domu. Możesz też współpracować z nauczycielem polonistą. On może się zająć z uczniami pracą z tekstem podczas lekcji języka polskiego. Możesz również poprosić o pomoc wychowawcę, który przeprowadzi z uczniami lekcję przypominającą zasady pracy grupowej ustalone w klasie oraz pokazującą zalety takiej pracy w różnych zawodach.

Zaproponuj uczniom, żeby pracując nad tekstem, skorzystali z poniższych kryteriów sukcesu.

Kryteria do pracy nad tekstem:

- wymieniam nazwiska polskich matematyków,
- podaję nazwę lwowskiej kawiarni, w której spotykali się matematycy,

- omawiam, w jaki sposób matematycy pracowali nad udowadnianiem tez,
- wyjaśniam, dlaczego te spotkania były ważne dla nauki.

Tuż przed lekcją przygotuj materiały i stanowiska pracy dla uczniów.

Wprowadzenie i początek zajęć

Uczniowie wchodzą do klasy i dostają identyfikatory z nazwiskami matematyków, którzy spotykali się na rozwiązywaniu *problematów* w lwowskiej kawiarni Szkocka. Możesz dawać identyfikatory losowo lub według zasady, którą przyjmiesz. Dzięki identyfikatorom łączymy uczniów w 3–4 osobowe grupy, w których będą rozwiązywali zadania podczas lekcji. W zależności od liczby uczniów, przygotuj tyle nazwisk, by w każdej grupie znajdowali się inni matematycy. Nazwiska matematyków są zapisane na arkuszach papieru przytwierdzonych do stolików.

Uczniowie siadają przy stolikach i łączą się w grupy, odnajdując nazwisko „swojego" matematyka na właściwym arkuszu.

Robiąc wprowadzenie do zajęć, poproś uczniów, żeby przyjrzeli się swoim identyfikatorom i miejscom. Zadaj pytania:

- Czy wiecie, czyje nazwiska znajdują się na Waszych identyfikatorach?
- W jakim mieście spotykali się matematycy, których nazwiska są na identyfikatorach?
- Jak sadzicie, dlaczego będziemy rozwiązywać zadania pisząc na stolikach? Jakie zdarzenia z życia lwowskich matematyków Wam to przypomina?
- Jak nazywała się lwowska kawiarnia, w której spotykali się ci matematycy?
- W jakim celu, oprócz spotkań towarzyskich, matematycy tam przychodzili?
- Jak sądzicie, dlaczego dziś będziemy pracować w grupach nad zadaniami, które nazwałam/em *problematami?*

Wykorzystaj patyczki do losowania, żeby wybrać uczniów, którzy będą odpowiadali na pytania.

Kiedy będziesz mówić uczniom o celach lekcji przypomnij ich odpowiedzi. Powiedz im, że pracując zespołowo w grupach „lwowskich matematyków" będą działali jak naukowcy, a ich zadaniem będzie przeprowadzanie dowodów. Poproś, aby uczniowie w grupach matematyków wzajemnie się sobie przedstawili.

W czasie lekcji

Uczniowie wspólnie rozwiązują zadania na dowodzenie, nazwane na potrzeby tej lekcji *problematami.* Możesz wybrać jeden lub kilka zadań-*problematów* z załączonego na końcu scenariusza materiału „Udowodnij, że.... Zadania-*problematy*", dostosowując je do aktualnie kształtowanych umiejętności czy poziomu dzieci. Możesz też samodzielnie przygotować zadanie odpowiednie do działu matematyki, nad którym chcesz, aby pracowali uczniowie.

Przed lekcją zapisz lub naklej wydrukowane z materiału „Udowodnij, że.... Zadania-*problematy*" na arkuszach szarego papieru przeznaczonych do pracy grup uczniowskich. Grupy uczniów – „lwowskich matematyków" mają określony czas – ok. 20 min. – na znalezienie rozwiązania *problematów.* Jeżeli potrzebują pomocy w trakcie pracy, mogą Ci to zasygnalizować za pomocą metodników/świateł. Światło zielone oznacza – „działamy, dobrze nam idzie". Światło żółte – „mamy pomysł, ale chcemy się upewnić, czy dobrze myślimy" lub – „potrzebujemy wskazówki". Światło czerwone – „jest źle, nie wiemy co robić". W czasie pracy grup obserwujesz pracę, pomagasz, udzielasz wskazówek. Jeżeli jakaś grupa pracuje szybciej od pozostałych, to możesz jej dać kolejny *problemat* lub poprosić o wymyślenie własnych *problematów.* Pamiętaj, że zadania-*problematy* często mają więcej niż jeden możliwy sposób rozwiązania. Wartością jest to, żeby grupy uczniów jak najbardziej samodzielnie dochodziły do rozwiązań, wykorzystując własny tok myślenia. Jeśli różne grupy to samo zadanie rozwiążą innym sposobem, warto to docenić w omówieniu pracy grup. Jeśli uczniowie, rozwiązując zadanie-*problemat,* popełnią błędy, doceń ich wysiłek i odwagę. Podkreśl na forum, że sławni matematycy też się mylili i wielokrotnie próbowali rozwiązać jakiś problem. Bez odwagi popełniania błędów nie byłoby ważnych dla ludzkości odkryć. Pod scenariuszem lekcji znajdziesz różne sposoby rozwiązań do wybranych zadań-*problematów.*

Następnym elementem lekcji jest udzielanie koleżeńskich informacji zwrotnych, które trwa ok. 10 min. Po określonym czasie uczniowie zmieniają grupy przechodząc do sąsiedniego stolika – zmieniają się „po kole". Rozdaj grupom prace wzorcowe i poproś o udzielenie koleżeńskiej informacji zwrotnej w formie *dwie gwiazdy, jedno życzenie.* Uczniowie na marginesie arkusza jednym kolorem zapisują gwiazdy, podkreślając mocne strony, a innym kolorem – życzenie, czyli wskazówkę do poprawy. Mogą też zapisać wskazówkę, co można zrobić, żeby dalej doskonalić się w tego typu zadaniach.

Uczniowie wracają do swoich prac, czytają informację zwrotną kolegów/koleżanek.

Podsumowanie

Przypomnij uczniom cel lekcji. Rozdaj każdemu uczniowi komplet trzech samoprzylepnych karteczek – zieloną, żółtą i czerwoną. Poproś uczniów o zastanowienie się i zapisanie na karteczkach:

Zielona: „Moim dzisiejszym sukcesem na lekcji jest..."

Żółta: „Dzięki wskazówkom z koleżeńskiej informacji zwrotnej dowiedziałam/em się ... "

Czerwona: „Trudność sprawia mi jeszcze..."

Wylosuj przy pomocy patyczków kilka osób i zaproś je do podzielenia się swoją refleksją w jednej z kategorii. Zachęć do zabrania głosu również pozostałych uczniów.

Zadanie dodatkowe dla chętnych uczniów

- Poszerzcie wiedzę o polskich matematykach i przeczytajcie inne artykuły o ich życiu i dokonaniach. Polecamy dwa artykuły: „Pasjans, który uratował Amerykę" oraz „Borsuk przy telefonie i UFO z piątego wymiaru. Topologia – polska specjalność".
- Ułóżcie *problemat* do rozwiązania przez kolegów podczas kolejnej lekcji. Nauczyciel będzie mógł użyć go jako jedno z zadań do sprawdzianu.

Uczniowie wychodząc z sali, naklejają swoje refleksje na tablicy. Zbierz je, przeczytaj i weź pod uwagę w planowaniu kolejnych zajęć.

KARTA PRACY NR 1

„Udowodnij, że…. Zadania-*problematy*”

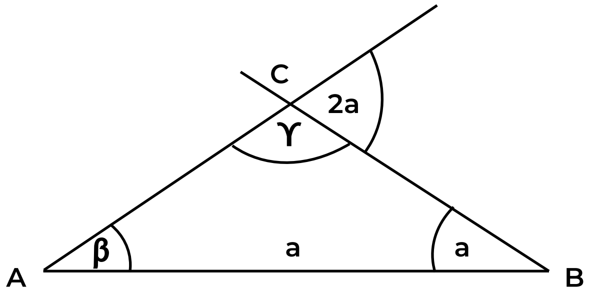
Zestaw zadań do pracy w grupach

√ Zadanie 1

Uzasadnij, że jeśli liczba jest podzielna przez 15 i przez 14, to jest podzielna przez 10.

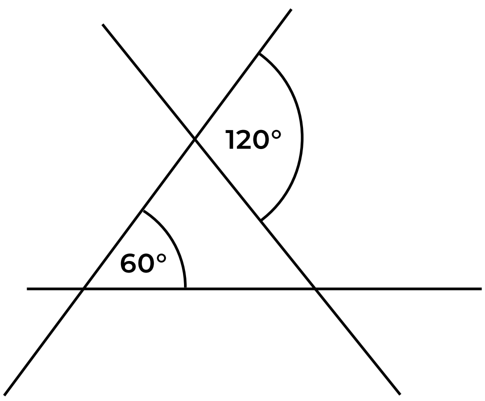
√ Zadanie 2

Uzasadnij, że oba kąty przy podstawie AB trójkąta ABC są równe.



√ Zadanie 3

Uzasadnij, że trójkąt na rysunku jest równoboczny.



√ Zadanie 4

Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

√ Zadanie 5

Uzasadnij, że jeśli liczba jest podzielna przez 12 i przez 14, to jest też podzielna:

a. przez 2

b. przez 4

c. przez 6

d. przez 21

e. przez 28

f. przez 42

g. przez 84.

√ Zadanie 6

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

√ Zadanie 7

Uzasadnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny

a. przez 2

b. przez 3

c. przez 6.

√ Zadanie 8

Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest podzielna przez 8.

√ Zadanie 9

Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest liczbą podzielną przez 6.

√ Zadanie 10

Wykaż, że suma liczby dwucyfrowej i liczby o przestawionych cyfrach jest liczbą podzielną przez 11.

√ Zadanie 11

Wykaż, że liczba 3·2100 + 2 102 + 2 103 jest podzielna

a. przez 15

b. przez 30

c. przez 60.

√ Zadanie 12

Wykaż, że liczba 29 + 45 + 84 + 162 jest podzielna

a. przez 28

b. przez 23.

√ Zadanie 13

Uzasadnij, że liczba 2197231245 jest podzielna a) przez 15 b) przez 45.

√ Zadanie 14

Wykaż, że ostatnią różną od zera cyfrą liczby 545·246 ·32 jest 8.

√ Zadanie 15

Uzasadnij, że przekątna równoległoboku dzieli figurę na dwa trójkąty przystające.

√ Zadanie 16

Podstawę AB trójkąta ABC podzielono na trzy równe odcinki: AD, DE i EB. Uzasadnij, że:

a. trójkąty ADC, DEC i EBC mają równe pola

b. stosunek pól trójkątów AEC i ABC wynosi 4:6.

Odpowiedzi do Karty Pracy nr 1

Przykładowe sposoby rozwiązań wybranych zadań – problematów:

Zadanie 1

Uzasadnij, że jeśli liczba jest podzielna przez 15 i przez 14, to jest podzielna przez 10.

Przykładowe sposoby rozwiązania:

I sposób:

Jeżeli liczba jest podzielna przez 15, to jest podzielna przez 3 i 5.

Jeżeli liczba jest podzielna przez 14, to jest podzielna przez 2 i 7.

Ponieważ ta liczba jest podzielna jednocześnie przez 14 i 15, to znaczy, że jest podzielna przez 2, 3, 5 i 7.

A jeśli jest podzielna przez 2 i 5 to jest podzielna przez 10.

II sposób:

Liczba podzielna przez 14 jest też podzielna przez 2.

Liczba podzielna przez 15 jest też podzielna przez 5.

Skoro liczba jest podzielna przez 2 i 5, to oznacza, że liczba ta jest podzielna przez 10.

Inny zapis dowodzenia:

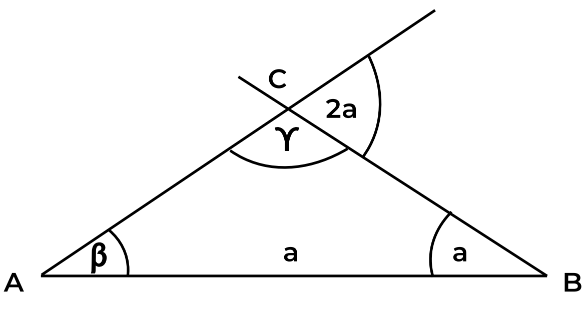
Niech liczba x dzieli się przez 14 oraz 15, tzn:

$\mathbf{x = 14 \cdot n = 2 \cdot 7 \cdot n}$ tak więc x dzieli się przez 2

$\mathbf{x = 15 \cdot m = 3 \cdot 5 \cdot m}$ tak więc x dzieli się przez 5

skoro x dzieli się przez 2 oraz 5, to dzieli się przez 10.

Zadanie 2



$\gamma = 180° - 2a$ kąt przyległy

$\beta + a + \gamma = 180°$

Podstawiamy w miejsce kąta γ

$\beta + a + 180° - 2a = 180°$

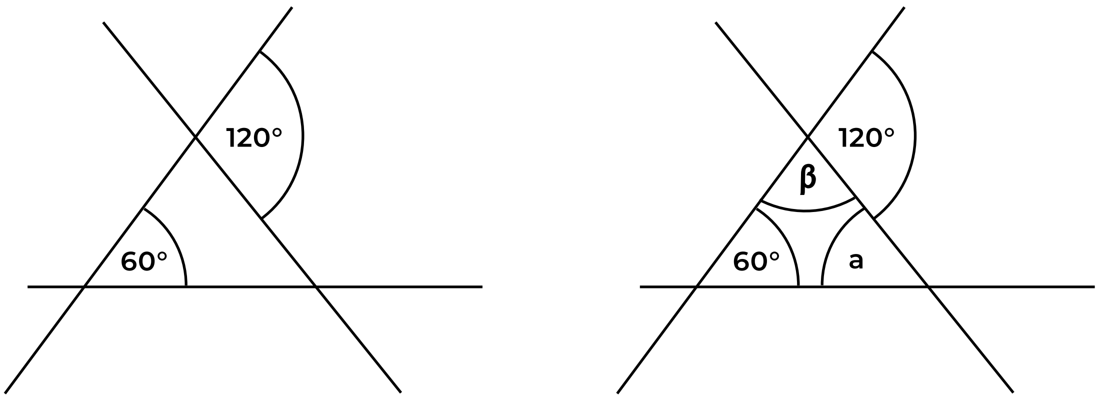
$\beta + a = 0$

$\beta = a$

Zadanie 3

Uzasadnij, że trójkąt na rysunku jest równoboczny.

Przykładowy sposób rozwiązania:



$\beta + 120° = 180°$

$\beta = 60°$

$a + \beta + 60° = 180°$

$a = 60°$

Wszystkie kąty trójkąta mają po 60°, zatem trójkąt jest równoboczny.

Zadanie 4

Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

Przykładowy sposób rozwiązania:

$2n + 1,\ 2n + 3,\ 2n + 5$

$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9$

$6n + 9 = 6n + 8 + 1 = 2(3n + 4) + 1$ – nieparzysta

Zadania zebrane na podstawie literatury:

- „Uzasadnianie własności i dowodzenie twierdzeń na egzaminie gimnazjalnym" – materiały SODMIDN w Kielcach.
- Derbis Grzegorz, „Zadania na dowodzenie w gimnazjum – przygotowanie uczniów do egzaminu" – prezentacja XXV Konferencja SNM, Warszawa, luty 2016.

Notatki

Czy współpraca naukowców pomaga dokonywać przełomowych odkryć naukowych?

Jakie są moje mocne strony, a jakie potrzeby w uczeniu się we współpracy?

Janusz Żmijski

Poruszane tematy

korzyści ze współpracy w uczeniu się/nauczaniu

Wiek uczniów

VII-VIII klasa szkoły podstawowej

Możliwość współpracy z nauczycielami

języka polskiego, matematyki

Przedmiot

godzina wychowawcza

Zarezerwuj czas

2 x 45 minut oraz praca samodzielna uczniów przed zajęciami

Poproś uczniów o przeczytanie

- Bogdan Piotrowski: „Misja: rozpracować Enigmę. Jak udało się znaleźć trzech genialnych studentów matematyki, którzy dokonali niemożliwego”, GW, 11.03.2019
- Marcin Bójko: „Złamali szyfr „nie do złamania” i skrócili wojnę o dwa lata”, GW, 12.04.2019
- Marcin Bójko: „Po co ci sinus? Poznaj Antoniego Zygmunda – matematyka, bez którego świat wyglądałby inaczej”, GW, 19.04.2019
- Marcin Bójko: „Stanisław Ulam: genialny lwowiak atomowiak. Dzięki niemu Ameryka zbudowała superbombę”, GW, 29.03.2019
- Marcin Bójko: „Borsuk przy telefonie i UFO z piątego wymiaru. Topologia – polska specjalność”, GW, 05.04.2019

Przygotuj przed lekcją

- Podziel uczniów na pięcioosobowe grupy.
- Przedstaw wszystkim pytania do analizy tekstu.
- Każdemu członkowi grupy przydziel inny artykuł do przeczytania i dokonania krótkiej analizy przed zajęciami.

Krótki opis zadania i cele zajęć

Zajęcia poświęcone są refleksji nad rolą współpracy w rozwiązywaniu zadań i problemów naukowych oraz nad tym, czego aktualnie uczniowie potrzebują w tym zakresie.

Celem zajęć jest kształtowanie umiejętności czytania tekstów popularnonaukowych ze zrozumieniem oraz ich ukierunkowanej analizy, kształtowanie umiejętności uczenia się we współpracy, refleksja nad rolą współpracy w rozwiązywaniu problemów naukowych, refleksja nad własnym poziomem umiejętności uczenia we współpracy.

Na początku uczniowie analizują opisy zawarte w pięciu wybranych artykułach. Analizę prowadzą metodą grup eksperckich (ang. *jigsaw*). Refleksję nad swoimi mocnymi stronami i potrzebami w zakresie współpracy uczniowie przeprowadzają na podstawie grupowego analizowania tekstów.

Opis zajęć

Przed zajęciami

Przed zajęciami każdy uczeń samodzielnie zapoznaje się z przydzielonym tekstem i analizuje go.

Instrukcja dla ucznia

Odnajdź w tekście informację, czy opisani w nim naukowcy współpracowali ze sobą lub z kimś innym, za pomocą któregoś z poniższych sposobów:

- współpraca w zespole naukowym pracującym nad zadaniem,
- współpraca uczniów z mistrzem/opiekunem/mentorem naukowym,
- współpraca zespołów naukowych w skali międzynarodowej,
- współpraca profesorów w wytypowaniu najzdolniejszych uczniów do zespołów zadaniowych,
- współpraca w zespole naukowym pracującym nad zadaniem – podział zadań ze względu na kompetencje,
- wspólne rozwiązywanie problemów matematycznych,
- inne/jakie?

Oceń, czy w analizowanym opisie dokonań polskich matematyków więcej jest przykładów współpracy naukowców, czy ich rywalizacji albo pracy w pojedynkę? Przygotuj się do uzasadnienia swojego stanowiska.

W czasie lekcji

Na zajęciach uczniowie najpierw spotykają się w grupach 4 lub 5 osobowych, które zapoznawały się z tym samym artykułem. Przedstawiają sobie nawzajem efekty swojej pracy, porównują je i dochodzą do wspólnych wniosków.

W drugim kroku uczniowie rozchodzą się do grup pięcioosobowych, uformowanych tak, by każdy z członków danej grupy znał inny tekst. Ich zadanie grupowe polega na:

- streszczeniu innym członkom grupy, o czym był analizowany tekst,
- przedstawieniu efektów jego ukierunkowanej analizy,
- podjęciu – po grupowej dyskusji – decyzji, czy w analizowanych opisach dokonań polskich matematyków więcej było przykładów współpracy naukowców, ich rywalizacji czy pracy indywidualnej.

W ostatnim kroku grupy przedstawiają na forum swoje stanowisko z uzasadnieniem.

Podsumowanie

Po zakończeniu tego etapu uczniowie wspólnie zastanawiają się, z jakich powodów grupowa praca nad rozwiązywaniem problemów jest korzystna? Sięgnijcie do przykładów polskich matematyków.

Możesz tę aktywność przeprowadzić przy użyciu metody *kuli śniegowej:*

- Uczniowie samodzielnie pracują nad listą argumentów za pracą grupową.
- Kontrolujesz pracę, chodząc po klasie. Możesz także sprawdzić powstałe listy.
- Uczniowie dobierają się w pary. Zadaniem każdej z par jest wynegocjowanie wspólnej listy na podstawie list stworzonych uprzednio przez każdego z członków zespołu. Zadbaj o to, by dyskusja miała charakter merytoryczny.
- Uczniowie dobierają się w czwórki. Zadaniem każdej grupy jest wynegocjowanie wspólnej listy na podstawie list stworzonych uprzednio przez pary. W liczniejszych klasach można powtórzyć krok, tworząc ósemki.
- Uczniowie zapisują listy i prezentują je na forum. Rezultatem zainicjowanej w klasie dyskusji będzie wspólna klasowa lista argumentów, które potwierdzają wartość pracy zespołowej.
- Na zakończenie zaproś uczniów do refleksji nad ich mocnymi stronami w pracy zespołowej. Zwróć ich uwagę na to, że w trakcie zajęć większość aktywności podejmowali zespołowo. Zaproponuj rozmowę w parach na temat własnych predyspozycji uczniów do uczenia się poprzez współpracę.

KARTA PRACY NR 1

„Analiza tekstów"

Bogdan Piotrowski: „Misja: rozpracować Enigmę. Jak udało się znaleźć trzech genialnych studentów matematyki, którzy dokonali niemożliwego"	
Dzięki zastosowaniu teorii permutacji Rejewskiemu oraz jego współpracownikom – Jerzemu Różyckiemu i Henrykowi Zygalskiemu – udało się dokonać niemożliwego: rekonstrukcji niemieckiej maszyny szyfrującej. [...]	Współpraca w zespole naukowym pracującym nad zadaniem
Sukces Rejewskiego, Różyckiego i Zygalskiego był poprzedzony studiami w Poznaniu i współpracą z innym wybitnym matematykiem – prof. Zdzisławem Krygowskim, ówczesnym prezesem Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Byli wychowankami profesora, który uchodzi za twórcę poznańskiej szkoły matematyki. [...]	Współpraca uczniów z mistrzem/opiekunem/mentorem naukowym
Z ponad 20 najlepiej rokujących studentów wskazanych przez Krygowskiego wyłoniono trójkę najbardziej obiecujących: urodzonego w Bydgoszczy Mariana Rejewskiego, poznaniaka Henryka Zygalskiego oraz pochodzącego z Kresów Jerzego Różyckiego. Ta trójka jesienią 1930 r. utworzyła ambitny i zgrany zespół pracujący dla filii Biura Szyfrów Wojska Polskiego w Poznaniu. [...]	Współpraca w zespole naukowym pracującym nad zadaniem
Mało tego – na podstawie swojej wiedzy teoretycznej Polacy zbudowali kopie Enigmy, które w lipcu 1939 r., w przededniu konfliktu zbrojnego, przekazali Brytyjczykom i Francuzom. Kto wie, czy nie był to największy polski wkład intelektualny w zwycięstwo aliantów.	Współpraca zespołów naukowych w skali międzynarodowej
Marcin Bójko: „Złamali szyfr „nie do złamania" i skrócili wojnę o dwa lata"	
Dlatego w 1930 r. zorganizowano na Uniwersytecie Poznańskim kurs kryptologii, na który profesorowie skierowali swych najzdolniejszych studentów matematyki. Po kursie młodzi matematycy zostali zatrudnieni w nowo utworzonej poznańskiej filii Biura Szyfrów, gdzie uczyli się tradycyjnych metod dekryptażu. [...]	Współpraca profesorów w wytypowaniu najzdolniejszych uczniów do zespołów zadaniowych

W tym czasie polski wywiad zdobył handlową wersję Enigmy (prostszą niż wojskowa), a od Francuzów pozyskał cenne dane wywiadowcze, w tym instrukcję obsługi niemieckiej maszyny. To właśnie porucznik Ciężki wykazał się ułańską fantazją, w najlepszym jej rozumieniu, bo był gotów porwać się na zadanie, z którym nie poradziły sobie wielokrotnie zasobniejsze wywiady Francji i Anglii (dlatego zresztą Francuzi chętnie podzielili się danymi wywiadowczymi, uznając je za bezużyteczne). Na tym etapie w 1933 r. do współpracy z Rejewskim dyrekcja Biura Szyfrów skierowała Zygalskiego i Różyckiego. Różycki opracował metodę zegarową poszukiwania ustawienia i kolejności bębnów w maszynie. To była jedyna metoda korzystająca ze statystycznych własności języka niemieckiego, wszystkie pozostałe używały metod czysto matematycznych, niezależnych od języka. [...] Zygalski z kolei opracował perforowane arkusze, które składane w odpowiedniej kolejności wskazywały położenie dwóch pierwszych rotorów maszyny. Płachty Zygalskiego obliczono za pomocą urządzenia zbudowanego przez Rejewskiego, zwanego cyklometrem. Gdy Niemcy zaczęli zmieniać szyfry codziennie, pozwalały one uzyskać klucz dzienny w kilkanaście minut. Zestawów płacht musiało być sześć, bowiem tyle było wszystkich możliwych kombinacji kolejności ustawień trzech rotorów Enigmy. Zestawów płacht musiało być sześć, bowiem tyle było wszystkich możliwych kombinacji kolejności ustawień trzech rotorów Enigmy. Rejewski zaprojektował również urządzenie automatycznie wyszukujące klucze dzienne zwane bombą Rejewskiego. Składało się ono tak naprawdę z sześciu zespołów szyfrujących Enigmy, po jednym dla każdej kombinacji rotorów. [...] Analiza szyfru sprowadziła się do żmudnego wprawdzie, ale wykonalnego sprawdzenia kilku tysięcy kombinacji. Do sprawdzania kombinacji służyły właśnie płachty Zygalskiego, a później bomba Rejewskiego. [...]	Współpraca w zespole naukowym pracującym nad zadaniem – podział zadań ze względu na kompetencje

Marcin Bójko: „Po co ci sinus? Poznaj Antoniego Zygmunda – matematyka, bez którego świat wyglądałby inaczej”	
A jednym z pionierów tej dziedziny jest Antoni Zygmund, polski matematyk, który od 1940 r. pracował w USA i był nauczycielem i mentorem wielu sław analizy harmonicznej, m.in. Józefa Marcinkiewicza, Alberta Calderóna, Leonarda Berkovitza, Eliasa Steina czy Paula Cohena.	Współpraca uczniów z mistrzem/opiekunem/mentorem naukowym
Antoni Zygmund urodził się w 25 grudnia 1900 r. w Warszawie, która była wówczas częścią zaboru rosyjskiego. W pierwszym roku po odzyskaniu niepodległości rozpoczął studia matematyki na Uniwersytecie Warszawskim. Uczył się od najznamienitszych matematyków warszawskiej szkoły matematycznej: Janiszewskiego, Mazurkiewicza, Sierpińskiego, Dicksteina. Tam też poznał ledwie trzy lata starszego Aleksandra Rajchmana, który wprowadził go w świat szeregów trygonometrycznych. W 1923 r. obronił doktorat pod jego kierunkiem (choć oficjalnie promotorem był Mazurkiewicz, bo Rajchman był zbyt młody na prowadzenie doktorantów). Zygmund opowiadał, że Marcinkiewicz prześcignął go w niektórych działach jego własnej specjalności i z ucznia szybko stał się nauczycielem.	Współpraca w zespole naukowym pracującym nad zadaniem
W wieku 15 lat przeczytał traktat o rachunku różniczkowym, dwa lata później „Zarys teoryj mnogości” Wacława Sierpińskiego, dzięki czemu mógł prowadzić w szkole długie dysputy z nauczycielem matematyki, którym był wykładowca z lwowskiego uniwersytetu. Na Politechnice Lwowskiej, gdzie rozpoczął studia z inspiracji ojca, już na pierwszym roku spotkał znakomitych wykładowców, twórców nowej polskiej szkoły matematycznej: Stefana Banacha, Stanisława Mazura i Kazimierza Kuratowskiego. Za namową tego ostatniego opracował swoją pierwszą publikację w „Fundamenta Mathematicae”, najważniejszym polskim piśmie matematycznym. Dotyczyła arytmetyki na liczbach kardynalnych.	Współpraca uczniów z mistrzem/opiekunem/mentorem naukowym
Szybko został bywalcem słynnej kawiarni Szkocka, gdzie przy kawie i koniaku lwowscy matematycy rozwiązywali różne problemy matematyczne. Przyjęli go do swego grona, choć nie miał jeszcze 20 lat. A Ulam dotrzymywał kroku starszym kolegom. Jej budową kierował fizyk węgierskiego pochodzenia Edward Teller, którego Ulam poznał przy projekcie Manhattan.	Wspólne rozwiązywanie problemów matematycznych

<table>
<tr><td>Kiedy Teller zapoznał Ulama ze swoim pomysłem na zapalnik superbomby, Polak zamknął się w pracowni i przez kilka tygodni prowadził obliczenia. Koniec końców stwierdził, że do eksplozji nie dojdzie. Ładunek wodorowy nie zostanie symetrycznie sprężony ze wszystkich stron, rozpadnie się zanim dojdzie do reakcji i superbomba będzie wielkim niewypałem.

„Teller był bliski załamania, miał łzy w oczach" – wspominał Ulam i sam wkrótce wymyślił inne rozwiązanie: aby do zapłonu doprowadzić dzięki zjawisku implozji.

Zaproponował otoczenie ładunku wodorowego warstwą gęstej pianki z plastiku. Zapalnikiem było promieniowanie X z eksplozji zwykłej bomby atomowej, które dociera do warstwy plastiku jeszcze przed falą uderzeniową (a więc zanim cały ładunek się rozerwie i rozproszy) i momentalnie zamienia piankę w plazmę, która wybuchowo się rozpręża. A wtedy – zgodnie z trzecią zasadą dynamiki „akcji i reakcji" – przeciwny impuls skierowany do wewnątrz spręża wodór, tj. wywołuje implozję. Ulam obliczył, że będzie ona idealnie symetryczna, co doprowadzi do syntezy jąder wodorowych, a w efekcie superwybuchu.

Projekt Tellera-Ulama stał się podstawą konstrukcji pierwszej amerykańskiej bomby wodorowej, która zniszczyła atol Enewetak w 1952 r. (rok później taką eksplozję przeprowadzili także Rosjanie).</td><td>Współpraca w tandemie naukowym</td></tr>
<tr><td colspan="2">Marcin Bójko: „Borsuk przy telefonie i UFO z piątego wymiaru. Topologia – polska specjalność"</td></tr>
<tr><td>Karol Borsuk to jedna z najznamienitszych postaci warszawskiej szkoły matematycznej. Jego specjalnością była topologia, którą rozwijał ze swoim uczniem i doktorantem Samuelem Eilenbergiem.</td><td>Współpraca mistrza naukowego z uczniem</td></tr>
</table>

Notatki

Artykuły

Gazeta Wyborcza nr 47, wydanie z dnia 25/02/2019 „Wielcy polscy matematycy", str. 17

Co nam dał genialny Banach

Znacie zapewne przysłowie o tym, że nie widać lasu spoza drzew. Otóż matematyka przez całe wieki była dla ludzi takim zbiorem oddzielnych drzew. Geniusz lwowskich matematyków polegał na tym, że dostrzegli w niej nowy las.

Bogdan Miś

Matematyka była kiedyś – jak czytałem w jakiejś starej encyklopedii – nauką „o liczbach i figurach". Dzieliła się na geometrię i rozmaite rachunki – arytmetykę i algebrę.

Do XVII wieku.

Wtedy pojawiła się zupełnie nowa koncepcja. Jej autorami byli głównie dwaj uczeni francuscy: prawnik i lingwista Pierre de Fermat (ten od najsłynniejszego chyba w historii wielkiego twierdzenia, udowodnionego dopiero pod koniec ubiegłego stulecia) i wielki filozof René Descartes, zwany Kartezjuszem. Ten drugi opisał tę koncepcję w 1637 r. i dlatego on jest dziś głównie kojarzony z nowym podejściem, które od jego nazwiska zwane jest rewolucją kartezjańską.

Sprowadza się ona – jeśli idzie o matematykę – do prostej uwagi, że punktom okalającej nas przestrzeni można przypisać układy liczb. Punktom prostej – jedną liczbę, punktom płaszczyzny – pary liczb, punktom przestrzeni trójwymiarowej – trójki; i tak dalej.

Rachunki zamiast wyobraźni

Istotą koncepcji Kartezjusza jest to, że skoro liczbom i ich układom można przypisać obiekty geometryczne, to rozumowania geometryczne można zastąpić... rachunkiem. Zamiast żmudnie prowadzić skomplikowane konstrukcje i dostrzegać zależności między figurami i bryłami, wystarczy policzyć, wyobraźnię zastąpić rachowaniem. Czasem skomplikowanym, ale wykonalnym i możliwym do sprawdzenia.

Geometria stała się zatem w gruncie rzeczy tylko innym obliczem jednej rzeczywistości matematycznej. Twierdzenia geometryczne zaczęły ściśle odpowiadać związkom między liczbami – i odwrotnie, te ostatnie zyskały naturalną interpretację w układach figur na płaszczyźnie czy brył w „zwykłej" przestrzeni.

Powstała wówczas geometria analityczna. Matematyka okazała się lasem. Mówiąc uczenie – nastąpiła zasadnicza zmiana paradygmatu, czyli najogólniejszego spojrzenia na naukę. Zrozumieliśmy, że licząc czy kreśląc konstrukcje, mówimy o tym samym, tylko przy użyciu innego języka.

Las różniczkowania i całkowania

Mniej więcej w tym samym czasie, czyli w XVII w., dwaj inni geniusze – Anglik Isaac Newton i Niemiec Gotfried Leibniz – wymyślili niezależnie od siebie nową metodę badań rzeczywistości i nowy dział matematyki: analizę, czyli rachunek różniczkowy i całkowy. To był sposób na badanie zależności funkcyjnych między wielkościami zmiennymi.

Znacznie później Fryderyk Engels zauważył, że tym samym „do matematyki wkroczyły ruch i dialektyka". Miał – wyjątkowo – rację. Wyjątkowo, bo inne jego wypowiedzi o matematyce budzą dziś (zależnie od poczucia humoru czytającego) ból zębów albo homerycki śmiech.

Engels nie spostrzegł, że jednocześnie – żeby wrócić do metafory lasu – pojawiło się w matematyce nowe oddzielne drzewo. I rosło oddzielnie przez niemal 300 lat. Las znowu przestał być widoczny.

Pod koniec XIX wieku pojawiło się na świecie kilku matematyków, którzy – jak to często w nauce bywa – wpadli na przełomie stuleci na podobny pomysł. Byli to m.in. Niemiec David Hilbert, Węgier Frigyes Riesz, Szwed Erik Ivar Fredholm.

Zaczęli badać nie poszczególne „drzewa", czyli funkcje i ich przebieg, ale całe zbiory funkcji o podobnych właściwościach.

Nie sposób dziś stwierdzić, który z nich pierwszy użył w odniesieniu do owych zbiorów słowa „przestrzenie", ale to nieistotne. Ważne, że zapoczątkowało to zupełnie nowe podejście do przedmiotu badań. Podejście o doniosłości rewolucji kartezjańskiej.

Banach i jego przestrzenie

I tutaj na scenę wkraczają nasi matematycy. W latach 20. ubiegłego stulecia w Polsce pojawił się pewien fenomen. Otóż nastąpił prawdziwy wysyp talentów matematycznych i powstała słynna Polska Szkoła Matematyczna, a właściwie dwie szkoły – warszawska i lwowska. W tej lwowskiej prym wodził słynny Stefan Banach, absolutny geniusz matematyczny, który nigdy nie ukończył żadnych studiów (bo i niczego formalnie nie studiował), pierwszym uzyskanym przez niego tytułem był zaś od razu doktorat.

Banach wraz z przyjaciółmi, wśród których był np. inny wielki matematyk Stanisław Mazur (muszę się pochwalić: był moim nauczycielem i wieloletnim szefem), wpadł na pomysł, żeby te przestrzenie funkcyjne – czyli, przypomnę, po prostu zbiory funkcji – w jakiś sposób skategoryzować i w pewien sposób „zapomnieć", z czego się one składają.

To nie było podejście zupełnie nowe, bo już wcześniej rozpatrywano np. przestrzenie metryczne, czyli takie, w których da się określić odległość między punktami (jak mówią matematycy – metrykę). Przy takim podejściu zupełnie nie jest istotne, czym są „naprawdę" punkty takiej przestrzeni. Tymi punktami mogą być – w szczególności – funkcje.

Banach badał inne rodzaje przestrzeni. Po pierwsze, unormowane, czyli takie, w których określona jest dla każdego punktu pewna nieujemna liczba (zwana normą). Te przestrzenie są bardzo blisko związane z przestrzeniami metrycznymi, ale jednak logicznie są czymś troszkę innym.

Po drugie, interesowały go przestrzenie liniowe – czyli takie, w których punkty można jakoś dodawać, odejmować i mnożyć przez liczby.

Po trzecie, ciekawiły go przestrzenie zupełne, które w dużym przybliżeniu można uznać za niemające żadnych „dziur". Na przykład zbiór wszystkich liczb rzeczywistych stanowi przestrzeń zupełną, ale zbiór liczb wymiernych (czyli ułamków) już nie.

Banach wziął pod uwagę przestrzenie, które jednocześnie są unormowane, liniowe i zupełne. Nazwał je – trochę nieskromnie – przestrzeniami typu B, upamiętniając w ten sposób własne nazwisko. Dziś zresztą nazywa się je wprost przestrzeniami Banacha.

Nowa rewolucja ze Lwowa

Na marginesie – zupełnie niezależnie od Banacha na całkiem podobny pomysł wpadł Amerykanin Norbert Wiener (zwany „ojcem cybernetyki"). Ale pierwszą w historii monografią, w której te przestrzenie zostały porządnie opisane, jest słynna „Teoria operacji liniowych" Banacha z 1932 r. Zwróćmy uwagę: niemal dokładnie 300 lat po dziele Kartezjusza.

W momencie wydania tej książki nie tylko zaczyna się historia zupełnie nowej dyscypliny matematycznej, zwanej dziś analizą funkcjonalną, ale także – jak właśnie w wypadku rewolucji Kartezjusza – mamy do czynienia ze zmianą paradygmatu i powstaniem całkiem nowego spojrzenia na matematykę.

Okazało się mianowicie, że po pierwsze, da się wyróżnić duże klasy funkcji, które stanowią przestrzenie typu B. I są to ważne klasy funkcji – także w zastosowaniach praktycznych, np. w inżynierii.

Nowa teoria dała matematykom do ręki narzędzie badania takich klas niejako całościowo „za jednym zamachem". Dowodząc twierdzenia, które jest prawdziwe dla abstrakcyjnej przestrzeni Banacha, dowodzimy tym samym całej masy twierdzeń o różnych zbiorach funkcji. A także, co nie bez znaczenia, o otaczającej nas rzeczywistości, bo nasza euklidesowa przestrzeń trójwymiarowa też jest przestrzenią Banacha!

Przy tym często taki ogólny dowód jest znacznie prostszy niż twierdzenia dotyczące przypadków „szczególnych".

Po drugie, matematyka znów okazała się „lasem". Spojrzenia na jej pojęcia z punktu widzenia dawnej geometrii, zwykłej analizy czy algebry, ponownie dają, okazuje się, tylko różne obrazy tej samej rzeczywistości (matematycznej).

Od stolika do atomu

Twierdzenia i pojęcia geometrii mają zatem odpowiedniki nie tylko w kartezjańskim świecie liczb, ale też w banachowskim świecie funkcji. I na odwrót.

I choć owa jedność przedmiotu badań jest z pewnością doniosła filozoficznie, to ważniejsze chyba jest to, że znając, powiedzmy, głęboko geometrię, mamy prawo pytać: jak to, czy inne jej twierdzenie, tłumaczy się na język funkcji?

Czym np. byłby w świecie przestrzeni Banacha układ współrzędnych? Jak określić dla funkcji pojęcie, dajmy na to, prostopadłości?

I najważniejsze: czy w ten sposób postępując i szukając analogii w dobrze nam już znanej dziedzinie – dowiadujemy się czegoś nowego w dziedzinie nowej? A jeszcze ważniejsze: czy badając świat matematyczny na tak wysokim poziomie abstrakcji jak przestrzenie Banacha, dowiadujemy się w ogóle czegoś istotnego i nowego? Czegoś, co nam nigdy nie przyszło do głowy?

Odpowiedź na te wszystkie pytania okazała się pozytywna.

I dlatego te słynne wspólne biesiady i – nazwijmy rzecz po imieniu – tęgie popijawy kilkunastu młodzieńców i kilku dojrzałych mężczyzn w lwowskiej kawiarni Szkocka, podczas których mazali jakieś dziwaczne dla laika gryzmoły ołówkami na marmurowych blatach stolików i toczyli zaciekłe spory w języku całkowicie niepojętym dla siedzących obok zacnych lwowskich mieszczan – miały tak ogromne znaczenie dla współczesnej cywilizacji.

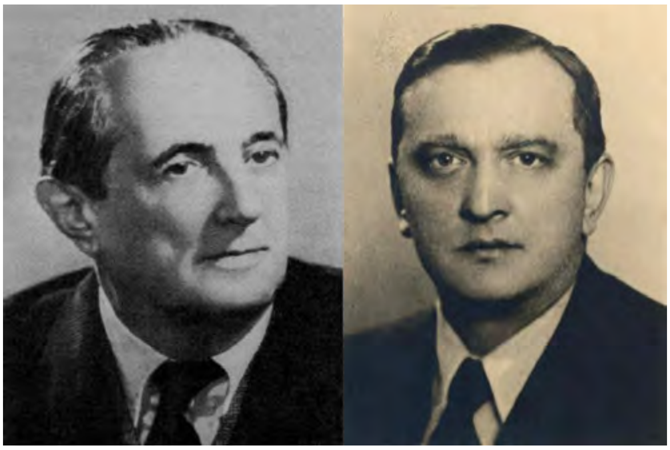
Gdyby nie one, nie ujarzmilibyśmy zapewne energii atomowej ani nie dokonalibyśmy innych równie doniosłych osiągnięć.

Ale Historia nr 53, wydanie z dnia 04/03/2019, str. 2

Lwowscy wirtuozi różniczek i całek

Hugo Steinhaus i Stefan Banach czasem byli traktowani jak mistrz i uczeń, który mistrza przerósł. Steinhaus trochę kokieteryjnie mawiał, że odkrycie Banacha to jego największy sukces w matematyce.

Mariusz Urbanek



Steinhaus i Banach (Domena publiczna)

Lwowska szkoła matematyczna narodziła się w Krakowie na Plantach, w miejscu, gdzie w 2016 r. ustawiono ławeczkę z pogrążonymi w rozmowie Stefanem Banachem i Ottonem Nikodymem. 100 lat wcześniej, letnim wieczorem 1916 r., Nikodym, absolwent matematyki na Uniwersytecie Lwowskim, i Banach, pracownik kolei po dwóch latach Politechniki Lwowskiej, rozmawiali o całce Lebesgue'a.

Rozmowę usłyszał Hugo Steinhaus, matematyk po doktoracie na Uniwersytecie w Getyndze, który w Krakowie pracował w Centrali Odbudowy Kraju, ponieważ chciał uniknąć wojska. Twierdzenie Lebesgue'a rozumieli tylko wtajemniczeni, więc zaintrygowany, kto w środku lata rozmawia o matematyce, podszedł. Tak poznał Banacha.

Uczeń, który przerósł mistrza

Steinhaus był starszy tylko o 5 lat. Pochodził z bardzo bogatej żydowskiej rodziny kupców z Jasła, stryj posłował do austriackiego parlamentu. W komunistycznej Polsce w ankietach personalnych w rubryce pochodzenie pisał „arystokracja plus burżuazja". Rozpoczęte we Lwowie studia kontynuował na Uniwersytecie w Getyndze, który był na przełomie XIX i XX w. matematyczną mekką. Doktorat napisał u jednego z największych ówcześnie matematyków Davida Hilberta.

Banach był nieślubnym dzieckiem niepiśmiennej góralki i rekruta na przepustce, potem urzędnika w c.k. Głównym Urzędzie Podatkowym. Matki nigdy nie poznał, ojciec oddał go na wychowanie właścicielce zakładu pralniczego z Krakowa. Żeby pomóc w opłaceniu gimnazjum, dawał korepetycje kolegom w szkole i na mieście. Pieniędzy wystarczyło tylko na dwa lata studiów na Wydziale Inżynierii Politechniki Lwowskiej. I tu właściwie historia Stefana Banacha powinna się skończyć.

Ale wybuchła I wojna światowa i poznał w Krakowie Steinhausa. Spotykali się regularnie, rozwiązywalli matematyczne problemy i dyskutowali. Gdy po wojnie Steinhaus objął katedrę na Uniwersytecie Lwowskim, załatwił Banachowi asystenturę na Politechnice.

Zmowa uczonych

Potem wszystko potoczyło się błyskawicznie dzięki Steinhausowi. W 1920 r. Banach był już doktorem, w 1922 r. – profesorem nadzwyczajnym, dwa lata później – zwyczajnym. Miał wtedy dopiero 32 lata. Studiów na Wydziale Inżynierii nigdy nie dokończył.

Zresztą doktorat też powstał przypadkiem, Banach cieszył się sławą nie tylko matematycznego geniusza, lecz także lekkoducha, którego nudziło zapisywanie wygłaszanych z pamięci dowodów i twierdzeń. Wolał spędzać czas na meczach Pogoni Lwów albo przy piwie. Na szczęście w towarzystwie innych matematyków.

Dziekan Wydziału Matematyki Uniwersytetu Jana Kazimierza, prof. Stanisław Ruziewicz, polecił jednemu z asystentów chodzić za doktorantem nawet do knajpy i notować wszystko, co mówi. Banach myślał i wyrzucał z siebie matematyczne twierdzenia szybciej, niż mógł je zanotować, twierdzili jego współpracownicy. Miał on jasność myślenia, którą Kazimierz Bartel nazwał raz aż nieprzyjemną – napisał Steinhaus. Banach tylko zaakceptował notatki. Tak powstała rozprawa „O operacjach na zbiorach abstrakcyjnych i ich zastosowaniach do równań całkowych". Do jej obrony też zmuszono go podstępem. – Jest tu kilku panów z Warszawy, którzy chcieliby przedyskutować pewien problem matematyczny – powiedział mu dziekan. Dyskusja okazała się publiczną obroną.

W 1922 r. doktorat Banacha opublikowano po francusku. Ta data jest datą przełomową w historii matematyki – napisał jego uczeń prof. Stanisław Mazur. Wydana dziesięć lat później „Teoria operacji liniowych" została przetłumaczona na wszystkie najważniejsze języki świata, ugruntowując sławę Banacha.

Różniło ich wszystko oprócz matematyki

Banach prowadził życie, na które lwowska profesura patrzyła krzywo. W odróżnieniu od Steinhausa nie przestrzegał profesorskiego dress code'u, pojawiał się publicznie bez marynarki i krawata, za to w koszuli z krótkim rękawem, od opery wolał filmy kowbojskie i nie cierpiał oficjalnych posiedzeń. – Wiem, gdzie nie będę – mówił, otrzymawszy kolejne zaproszenie. Akcentował swoje pochodzenie góralskie i miał dosyć lekceważący stosunek do typu ogólnie wykształconego inteligenta bez teki – pisał Steinhaus. – Przez całe życie zachował pewne cechy krakowskiego andrusa.

Uwielbiały go studentki, które obtańcowywał podczas uczelnianych balów. Niechętnie pracował przy biurku, palił jak smok i ciągnął innych matematyków na kawę i koniak do hałaśliwej Kawiarni Szkockiej. Banach dużo pił, ale nigdy się nie upijał – wspominał Stanisław Ulam. Podczas przyjęcia na matematycznym zjeździe w Gruzji kolejni matematycy znikali pod stołem, a Banach dalej przepijał zgodnie z obyczajem każdego, wspominała przyrodnia siostra.

Steinhaus był abstynentem, nie pił i nie palił, od piłki nożnej wolał tenisa i dbał, by niczym nie uchybić profesorskiemu sznytowi. Nie akceptował erotycznej swobody, z jaką Polska zareagowała na odzyskaną niepodległość. Krytycznie patrzył na moralny libertynizm i kochanki, które koledzy profesorowie zatrudniali jako asystentki. Wykłady prowadził tak drobiazgowo, że czasem sam gubił się w wywodzie. No i wolał od Szkockiej wytworną cukiernię Ludwika Zalewskiego przy pl. Akademickim, gdzie podawano najlepsze we Lwowie ciastka. Ponoć codziennie były wysyłane samolotem do Warszawy.

Jednakowe było tylko to, że nazwiska obu poznał cały świat. W 1929 r. Steinhaus i Banach założyli pismo „Studia Mathematica". Obok siebie, bez tłumaczenia, raz w roku ukazywały się w nim prace po francusku (francuski był językiem matematycznej międzynarodówki), niemiecku, angielsku i włosku, a po 1939 r. także po rosyjsku. Z 500 egzemplarzy nakładu „Studiów" 200 sprzedawano za granicą, kolejne 200 wymieniano na periodyki matematyczne ukazujące się na najważniejszych uniwersytetach Europy i Ameryki, 100 przeznaczano do sprzedaży w kraju. „Studia" ugruntowywały sławę matematyków znad Pełtwi:…można je uważać za organ tzw. szkoły lwowskiej – uznał Steinhaus.

Przestrzenie Banacha i introwizor Steinhausa

Banach wykładał, pisał skrypty akademickie, podręczniki gimnazjalne i rozprawy zrozumiałe wyłącznie dla specjalistów. Do encyklopedii trafiały kolejne pojęcia połączone z nazwiskiem Banacha: przestrzeń Banacha, całka Banacha, granica uogólniona Banacha, algebra Banacha. Wspólnie z Alfredem Tarskim, logikiem z Warszawy, dowiedli, że można rozłożyć dowolną kulę na skończenie wiele kawałków tak, żeby dało się z nich później złożyć dwie kule o tym samym promieniu i średnicy, co kula pierwotna. Świat musiał się nauczyć kolejnego pojęcia: paradoks Banacha-Tarskiego. W języku matematycznym tytuł ich pracy nie brzmiał już równie intrygująco: „O rozkładzie zbiorów punktów na części odpowiednio przystające".

O podręcznikach akademickich Banacha, przede wszystkim dwutomowym „Rachunku różniczkowym i całkowym", mówiono z podziwem. Nie tylko wypełniały luki na polskim rynku matematycznym, bo większość podręczników, z których korzystali studenci, to były książki francuskie i niemieckie, lecz także pisane były lekkim i przystępnym językiem.

Steinhaus próbował znaleźć dla swoich teorii także zastosowanie praktyczne. Nie zawsze skutecznie. Nie powiódł się na przykład pomysł przekonania Poczty Polskiej do urządzenia, które potwierdzałoby treść listu poleconego. Pisząc list na specjalnej maszynie, nadawca otrzymywałby dowód, iż rzeczywista zawartość koperty jest identyczna z kopią, którą posiada. Nie dogadali się. W efekcie Poczta do dziś, wydając poświadczenie nadania listu poleconego, potwierdza jedynie, że wysłana została koperta. W środku może być wszystko albo… nic.

Przez kilkanaście miesięcy Steinhaus próbował rozwiązać zagadkę, jak precyzyjnie wskazać umiejscowienie jakiegoś obiektu wewnątrz ludzkiego ciała. Dwuwymiarowe zdjęcie rentgenowskie potwierdzało jedynie obecność przedmiotu w ciele, a matematyk chciał skonstruować urządzenie pozwalające podczas operacji widzieć ciało pacjenta tak, jakby było trójwymiarowe i przezroczyste. Prototyp introwizora powstał we lwowskim szpitalu wojskowym. Pierwszą udaną operacją było wyciągnięcie odłamka igły z ręki kaprala Reguły. W 1938 r. Steinhaus uzyskał patent na introwizor w Polsce, później także w USA.

Grupka ludzi niespełna rozumu

Lwowscy matematycy spotykali się najpierw w kawiarni Roma, a później w Szkockiej przy placu Akademickim, róg ul. Aleksandra Fredry. Tam odbywały się wielogodzinne, zakrapiane alkoholem posiedzenia, podczas których rej wodził Banach. Kto chciał spędzać z nim czas, musiał to zaakceptować. Przychodzili: Steinhaus, Ulam, Mazur, Herman Auerbach, Marek Kac, Stefan Kaczmarz, Antoni Łomnicki, Władysław Orlicz, Stanisław Ruziewicz, Stanisław Saks, Juliusz Schauder, Włodzimierz Stożek, którzy stworzyli lwowską szkołę matematyczną. Przerzucali się zadaniami, rozwiązania zapisując na marmurowych blatach stolików.

Dla przyglądających się z boku wyglądali na grupkę ludzi niespełna rozumu – wspominał Ulam, który w 1936 r. wyjechał na stałe do USA (wiele encyklopedii traktuje go już jako uczonego amerykańskiego): *Czasem cała dyskusja składała się z kilku słów rzuconych w ciągu długich okresów rozmyślania. (...) od czasu do czasu śmiech jednego z siedzących, po czym następowały okresy długiego milczenia, w czasie których tylko piliśmy kawę i patrzyliśmy nieprzytomnie na siebie.* Ulam w czasie wojny brał udział w tzw. projekcie Manhattan, czyli pracach nad stworzeniem bomby atomowej. Po latach napisał, że intensywność myślenia i skupienia w Szkockiej może porównać tylko z okresem pracy w Los Alamos nad energią jądrową.

Jedna z matematycznych sesji w Szkockiej trwała 17 godzin. Steinhaus zapamiętał, że powstał podczas niej dowód ważnego twierdzenia dotyczącego przestrzeni Banacha. Następnego dnia nikt już nie był w stanie go odtworzyć: (...) blat stolika, pokryty śladami chemicznego ołówka, został po owej sesji, jak zwykle, zmyty przez sprzątaczkę kawiarni – wspominał.

Półśrodkiem było odstawianie do kąta zapisanego stolika i czekanie na studentów, których przyśle dziekan Łomnicki, żeby spisali z blatu wyniki sesji.

Zeszyt, który został Księgą

Kosztował 2,50 zł i miał zwykłe marmurkowe okładki. Kupiła go 17 lipca 1935 r. w sklepie z materiałami piśmiennymi żona Banacha Łucja,i oddała na przechowanie płatniczemu w Szkockiej. Odtąd każdy z matematyków mógł wpisać do zeszytu zadanie dla innych albo samemu pochwalić się rozwiązaniem. Korzyść była podwójna. Matematycy przestali bazgrać po marmurowych blatach stolików, a skomplikowane dowody nie ginęły już pod ścierkami sprzątaczek.

Wpisywane „problematy" opatrywano datą, nazwiskiem i informacją o nagrodzie, którą ofiarował autor zagadnienia autorowi rozwiązania. Za najprostsze można było wygrać kawę, małe piwo albo 10 deka kawioru, za trudniejsze wino, obiad w restauracji najlepszego lwowskiego hotelu George albo fondue a la creme w Genewie. Stanisław Mazur wyznaczył jako nagrodę za rozwiązanie zadania żywą gęś. Udało się to dopiero po 36 latach Szwedowi Perowi Enflo. Przyjechał do Warszawy, odebrał ptaka, ale nie mógł go wywieźć, więc gęś została zjedzona w Polsce.

Już po wojnie Łucja Banachowa przywiozła Księgę Szkocką do Wrocławia. Ulam w USA przetłumaczył ją na angielski i rozesłał do największych matematyków na świecie. Wzbudziła sensację, zawiedzeni byli tylko matematycy szkoccy, kiedy się okazało, że nie ma nic wspólnego z ich krajem.

To za mało, żeby opuścić Polskę

Sława Banacha szybko przekroczyła granice Oceanu Atlantyckiego. W latach 30. Lwów kilkakrotnie odwiedził prof. John von Neumann, później współtwórca pierwszego komputera. Miał za zadanie ściągnąć Polaka do pracy w USA, w zespole Norberta Wienera, nazywanego ojcem cybernetyki. Kilkanaście lat wcześniej Wiener ścigał się naukowo z Banachem. Teoria, która przeszła do historii jako „przestrzeń Banacha", początkowo nazywana była „przestrzenią Banacha-Wienera". Ostatni raz Wiener przysłał von Neumanna do Lwowa w lipcu 1937 r.

– Ile daje prof. Wiener? – zapytał Banach.

Neumann wręczył mu czek, na którym widniała tylko cyfra jeden.

– Prof. Wiener prosił, żeby dopisać tyle zer, ile pan uzna za stosowne – powiedział.

– To za mała suma, aby opuścić Polskę – miał odpowiedzieć Banach.

W ostatnim roku przed wojną został prezesem Polskiego Towarzystwa Matematycznego (w latach 1932-35 był wiceprezesem). Dostał nagrodę Polskiej Akademii Umiejętności – 20 tys. zł, co było wtedy fortuną. Miał otrzymać nagrodę podczas inauguracji nowego roku akademickiego. Nie zdążył, wybuchła wojna, pieniądze przepadły.

Jak się różniczkuje po marksistowsku?

Po zajęciu Lwowa przez Armię Czerwoną uczelniom narzucono sowieckich komisarzy, ale profesurę zapisano do Ukraińskiej Akademii Nauk. Banach został delegatem do Lwowskiej Rady Miejskiej i dziekanem Wydziału Matematyczno-Fizycznego Lwowskiego Uniwersytetu Narodowego im. Iwana Franki (nowa nazwa UJK), Steinhaus – kierownikiem katedry. Odpuszczono mu nawet prowokacyjne pytania zadawane partyjnym komisarzom: „Jak się różniczkuje po marksistowsku?".

Do Szkockiej pielgrzymowali radzieccy matematycy, by poznać Banacha. Obiecał sowieckiemu rektorowi, że nauczy się ukraińskiego, żeby móc w tym języku wykładać. Nie musiał, nawet ukraińscy studenci mówili po polsku. I mimo nacisków w kolejnych życiorysach pisał za każdym razem: „narodowość polska", choć w gazetach próbowano przedstawiać go jako uczonego radzieckiego.

Gdy Lwów zajęli Niemcy, Steinhaus wolał wyjechać. Resztę wojny spędził w okolicach Gorlic i Jasła jako Grzegorz Krochmalny, chłop spod Przemyśla. Banach nie znalazł się na liście uczonych zamordowanych przez hitlerowców w lipcu 1941 r. na lwowskich Wzgórzach Wuleckich. Byli na niej Tadeusz Boy-Żeleński, pięciokrotny premier II RP Kazimierz Bartel i kilku matematyków z kręgu Szkockiej. Banach został karmicielem wszy w Instytucie Rudolfa Weigla. Ausweis Instytutu pozwalał uniknąć łapanek i wywózki na roboty.

Lwowska szkoła przestała istnieć. W 1939 r. zginął Kaczmarz. Łomnicki, Stożek (wraz z dwoma synami) i Ruziewicz zostali zamordowani w lipcu 1941 r. Auerbacha, Saksa, Sternbacha i Schaudera, najwybitniejszego zdaniem Steinhausa ucznia Banacha, Niemcy zabili rok później. Władysław Hetper, wywieziony do Rosji w 1940 r., zginął w sowieckim łagrze. Przeżyli ci, którzy na czas wyjechali z Polski albo się przyczaili.

Taki, co się obywa bez wszystkiego – obywatel

W 1945 r. czekała już na Banacha Katedra Matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim. Nie zdążył, miał raka płuc, umarł we Lwowie 31 sierpnia. Jego pogrzeb był ostatnią wielką manifestacją polskości we Lwowie. Kondukt z gmachu Uniwersytetu na cmentarz Łyczakowski prowadziło trzech księży. Pochowany został w grobowcu rodziny Riedlów, u których mieszkał przez ostatni rok.

Steinhaus po wojnie znalazł się we Wrocławiu, gdzie współtworzył Wydział Matematyki na połączonych Uniwersytecie i Politechnice. W ankiecie na pytanie, czy przekraczał granicę Związku Radzieckiego, napisał, że to granica dwukrotnie przekraczała jego.

Zaczęto mówić o wrocławskiej szkole matematycznej, która przejęła lwowskie tradycje. Steinhaus zainaugurował zapisywanie Nowej Księgi Szkockiej (potem zmieniła nazwę na Księga Wrocławska), ale nie dorównała sławą lwowskiej. Zasłynął pracami z teorii gier i bezwzględnym egzekwowaniem reguł polszczyzny u matematyków. – Ten pan dostanie być może kiedyś Nagrodę Nobla, ale dopóki ja będę miał tu coś do powiedzenia, doktorem nie będzie, bo doktor powinien znać język ojczysty – mówił. Zaczął pisać aforyzmy, nową rzeczywistość skomentował: Taki, co się obywa bez wszystkiego – obywatel. Po najsłynniejszym: Kula u nogi – Ziemia, ukląkł przed nim Julian Tuwim.

Gen i już

Piętnaście lat po śmierci Banacha Instytut Matematyczny PAN zorganizował poświęconą mu konferencję. „Ten jeden z twórców analizy funkcjonalnej, najważniejszego współczesnego kierunku w matematyce (...) pozostawił ludzkości szereg wspaniałych osiągnięć ludzkiego geniuszu" – mówił uczony radziecki Siergiej Sobolew. „Geniusz Banacha stworzył dla nas tyle problemów, ile sam ich rozwiązał" – dodał AmerykaninMarshall Harvey Stone.

Nikt bardziej niż on nie przyczynił się do rozwiania szkodliwego mniemania, że we współzawodnictwie naukowym można brak geniuszu zastąpić innymi zaletami – napisał o Banachu Steinhaus. Geniusz – gen i już – brzmi jeden z jego aforyzmów.

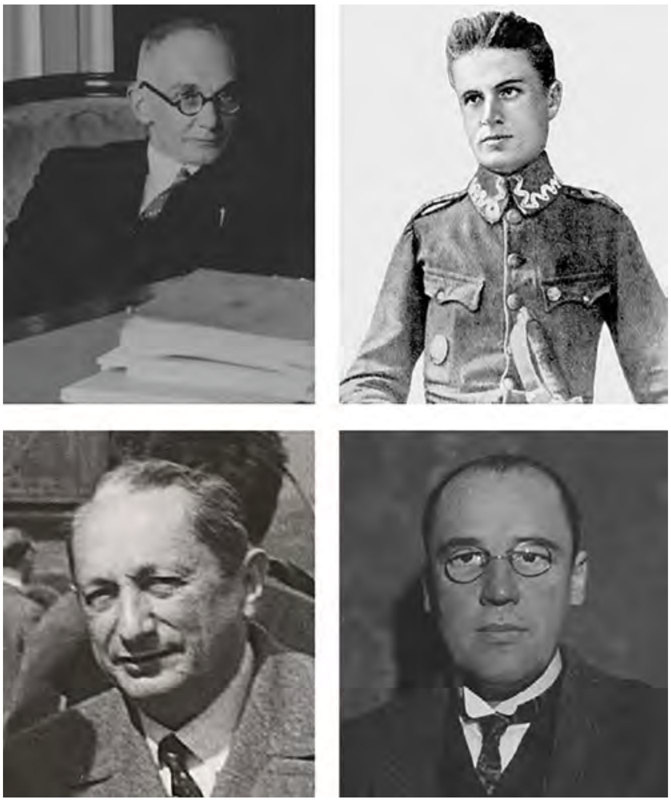
Notatki

Gazeta Wyborcza nr 57, wydanie z dnia 08/03/2019 „Wielcy polscy matematycy", str. 18

Zaczynali od zera, stali się legendą

Do XX wieku o polskich matematykach właściwie nikt nie słyszał. Jak to się stało, że podbili świat matematyki, gdy tylko Polska odzyskała niepodległość?

Paulina Rowińska



U góry: Stefan Mazurkiewicz (1888-1945),
Zygmunt Janiszewski (1888-1920).
Poniżej: Kazimierz Kuratowski (1896-1980),
Wacław Sierpiński (1882-1969) .
(Domena publiczna)

Mieliśmy wprawdzie Mikołaja Kopernika, który jako człowiek renesansu matematyką też się zajmował (głównie trygonometrią). Mieliśmy Józefa Marię Hoene-Wrońskiego (oficer w armii Kościuszki, a następnie rosyjskiej), który badał równania różniczkowe. Ale poza nimi w antologiach matematycznych sprzed XX w. na próżno szukać polskich nazwisk.

Gdyby więc XIX-wieczni bukmacherzy przyjmowali zakłady o to, skąd będą pochodzili najwybitniejsi matematycy kolejnego stulecia, niewielu postawiłoby na Polaków (tym bardziej że Polski wciąż nie było wtedy na mapach świata).

Jak zatem wytłumaczyć oszałamiający sukces polskich matematyków okresu międzywojennego?

Wbrew naszej narodowej postawie „jakoś to będzie" sukces ten został starannie zaplanowany. Za początek polskiej szkoły matematycznej uznaje się rozesłany po świecie w 1917 r. – u progu niepodległości Polski – list warszawskiego matematyka Zygmunta Janiszewskiego zatytułowany „O potrzebach matematyki".

Rewolucja po polsku

Manifest Janiszewskiego zawierał wiele sugestii dotyczących budowania mocnej pozycji matematyki polskiej w świecie, w tym dwa rewolucyjne pomysły, które, choć ryzykowne, okazały się kluczem do sukcesu.

Po pierwsze, Janiszewski postulował założenie matematycznego czasopisma poświęconego tylko jednej dziedzinie.

Dzisiaj wydaje się to oczywistością, gdyż większość profesjonalnych czasopism mniej lub bardziej się specjalizuje. Gdy ja szukam inspiracji w „Journal of the Royal Statistical Society" (Czasopismo Królewskiego Towarzystwa Statystycznego), koleżanka algebraiczka przegląda „Journal of Group Theory" (Czasopismo Teorii Grup). Jednak na początku XX w. takie posunięcie wydawało się ryzykowne. Henri Lebesgue, wybitny francuski matematyk, wyraził obawę, że wyspecjalizowane czasopismo nie ma szans na otrzymanie dostatecznej liczby artykułów dobrej jakości.

Na szczęście Lebesgue się mylił, a „Fundamenta Mathematicae" – czasopismo założone w 1920 r. przez trzech wykładowców reaktywowanego Uniwersytetu Warszawskiego – Zygmunta Janiszewskiego, Stefana Mazurkiewicza i Wacława Sierpińskiego – do dzisiaj jest wydawane przez Instytut Matematyki PAN.

Propozycje specjalizacji sięgały dalej. Otóż Janiszewski zasugerował, żeby badania większości polskich matematyków skupiły się tylko na wąskim wycinku matematyki.

Tak też się stało. Do dziś przedstawiciele warszawskiej szkoły matematycznej słyną przede wszystkim ze swoich dokonań w teorii mnogości (tj. teorii zbiorów), która wówczas była stosunkowo nową dziedziną, a także w spokrewnionych działach, takich jak logika matematyczna i topologia.

Od zera odlicz!

Nie wszyscy przedstawiciele warszawskiej szkoły matematycznej od początku byli ekspertami w postulowanych przez Janiszewskiego dziedzinach.

Wacław Sierpiński przez pierwsze lata swojej kariery naukowej badał własności liczb, szczególnie tych, które dzisiaj zwane są „liczbami Sierpińskiego". To takie nieparzyste liczby naturalne k, dla których wyrażenie k2^n+1 nie jest liczbą pierwszą (czyli podzielną tylko przez jeden i samą siebie) dla żadnej liczby naturalnej n.

W tym miejscu wypadałoby podać prosty przykład, ale niestety najmniejsza do tej pory znaleziona liczba Sierpińskiego to 78557. I nie wiadomo, czy istnieje mniejsza. Do dziś specjaliści od teorii liczb z pomocą potężnych komputerów łamią sobie głowy nad tzw. problemem Sierpińskiego, który polega na odszukaniu najmniejszej liczby Sierpińskiego. Problem wciąż pozostaje otwarty.

Podobno Sierpiński był orędownikiem liczenia od zera, a nie od jedynki. Jego przyjaciele opowiadali, jak w latach 60. na lotnisku O'Hara w Chicago zgłosił brak jednej z walizek. – Ależ, Mr Sierpiński, są wszystkie. Sześć. Tyle pan wpisał w deklaracji, proszę jeszcze raz przeliczyć – tłumaczył personel. – To niemożliwe – rozpaczał matematyk. – Liczyłem je już nieraz: zero, jeden, dwa, trzy, cztery, pięć" (tę anegdotę przytaczają Jan Hauke i Tadeusz Ostrowski w „Polscy rycerze na dworze królowej nauk").

Sierpiński jednak szybko zmienił temat badań. Zaintrygowało go twierdzenie mówiące, że można opisać punkty na płaszczyźnie tylko jedną współrzędną, a nie dwiema (np. długość i szerokość, jak przywykliśmy to robić). Na jego list z pytaniem o to dziwaczne twierdzenie pracujący w Getyndze polski matematyk Tadeusz Banachiewicz odpisał podobno jednym słowem: Cantor.

W ten sposób przed Sierpińskim otworzył się świat zapoczątkowanej przez niemieckiego matematyka Georga Cantora teorii mnogości (zwanej też teorią zbiorów).

Ta stosunkowo nowa dziedzina jest dziś dla matematyków niczym gramatyka dla dziennikarzy: niby nie myślimy o niej na co dzień, ale jest niezbędna przy pisaniu każdego tekstu.

Na początku XX wieku ta dziedzina była jeszcze w powijakach. Gdy świeżo habilitowany Sierpiński objął w 1910 r. kierownictwo II Katedry Matematyki na Uniwersytecie Lwowskim, jego kurs teorii mnogości był jednym z pierwszych na świecie (kilka lat później wydał podręcznik z tego zakresu – także pierwszy na świecie).

Badał fraktale, kiedy to jeszcze nie było modne

Dzisiaj kojarzymy nazwisko Sierpińskiego z takimi figurami jak trójkąt Sierpińskiego czy dywan Sierpińskiego. To fraktale, chociaż nazwę „fraktal" (łac. fractus – złamany, postrzępiony) ukuł dopiero w latach 70. XX wieku inny urodzony w Warszawie matematyk – Benoit Mandelbrot. Okazuje się jednak, że jedne z pierwszych fraktali w matematyce – zanim jeszcze pojawiła się ich ogólna teoria i nazwa – badał właśnie Sierpiński.

Intuicyjnie fraktale to obiekty samopodobne, czyli takie, które wyglądają tak samo niezależnie od skali, tj. ich dowolny fragment w powiększeniu wygląda jak całość.

Fraktale dosłownie nas otaczają – taki kształt mają linie wybrzeży, korony drzew, ale również wykresy giełdowych notowań, cen zboża, elektrokardiogramy, ludzkie oskrzela i sieć krwionośna. Ba! Każdy z nas zapewne kiedyś fraktala zjadł. Przyjrzyjcie się dokładniej kalafiorowi: cały kwiat kalafiora wygląda w przybliżeniu jak jedna różyczka, która wygląda jak fragment różyczki, która... itd.

Pisząc te słowa, wyglądam przez okno w matematycznym Instytucie Newtona w Cambridge, gdzie cztery lata temu na trawniku „wyrosło" nawet drzewo Sierpińskiego.

Trójkąt Sierpińskiego możecie bez problemu sami skonstruować – niczym ludową wycinankę (patrz – rysunek u góry). Okazuje się, że taki obiekt ma niezwykłe właściwości. Na przykład jego powierzchnia wynosi zero! Nie zajmuje żadnej powierzchni, ale mimo to nie jest obiektem jednowymiarowym, jak linia. Wymiar – tzw. wymiar fraktalny – trójkąta Sierpińskiego wynosi około 1,585, czyli jest liczbą niecałkowitą.

„Ułamkowy" wymiar odróżnia fraktale od spotykanych na co dzień obiektów jedno-, dwu – czy trójwymiarowych.

Nic dziwnego, że badania Sierpińskiego stały się inspiracją dla wielu matematyków! I nie tylko matematyków. W roku 1970, czyli rok po śmierci uczonego, Międzynarodowa Unia Astronomiczna nazwała jego nazwiskiem jeden z kraterów na Księżycu.

Na nagrobku Sierpińskiego na warszawskich Starych Powązkach wyryto napis: „Badacz nieskończoności". Na tym samym cmentarzu spoczywa też jego doktorant i współpracownik Stefan Mazurkiewicz, na którego tablicy nagrobnej napisano: „Nie umarł. Skończył tylko dowodzenie".

Nieproste twierdzenia o krzywych

Stefan Mazurkiewicz podjął badania na temat wymiarów, które zaczął Sierpiński. Zajmował się topologią, m.in. krzywymi wypełniającymi przestrzeń.

Krzywa to – w uproszczeniu – dowolna linia, jaką można narysować na kartce papieru, piłce, obwarzanku czy innym obiekcie. Mazurkiewicza szczególnie interesowały takie krzywe, które mogą szczelnie wypełnić cały kwadrat (ale nie próbujcie ich rysować ołówkiem czy flamastrem, bo matematycy zakładają, że są one nieskończenie cienkie! Tu działa tylko matematyczna wyobraźnia). Na zawsze zapisał się w historii matematyki dzięki twierdzeniu Hahna-Mazurkiewicza, które takie krzywe charakteryzuje. Próżno dzisiaj szukać porządnego kursu topologii, podczas którego studenci nie musieliby żmudnie dowodzić tego twierdzenia.

Wbrew pozorom topologia to nie nauka o topolach (jak myślałam przez znaczną część swojego życia), lecz o takich własnościach obiektów, które nie zmieniają się przy deformacjach. W topologii dozwolone jest dowolne wyginanie, rozciąganie czy skręcanie obiektów, lecz nie rozrywanie lub sklejanie. Innymi słowy, topolog nie odróżnia obwarzanka od filiżanki: oba mają w sobie dokładnie jeden otwór (obwarzanek – w samym środku, filiżanka – w uchwycie). Gdyby były z plasteliny, moglibyśmy bez problemu przekształcić filiżankę w obwarzanek, i na odwrót.

Podobnie krzywą w topologii możemy dowolnie wyginać i rozciągać, byleby zgadzała się liczba miejsc, w których przecina się ona sama ze sobą.

Matematyczny skalpel do rozcinania przestrzeni

Topologią zajmował się również Zygmunt Janiszewski, który był rówieśnikiem Mazurkiewicza.

Do jego największych dokonań należy twierdzenie Janiszewskiego (tak, podręczniki do topologii obfitują w polskie nazwiska!), które umożliwiło dowód jednego z fundamentalnych twierdzeń topologii: twierdzenia Jordana o rozcinaniu. Mówi ono, że jeżeli narysujemy na kartce krzywą zamkniętą, czyli jej początek i koniec znajdą się w tym samym punkcie, ale nieprzecinającą się (przykładem może być okrąg), to podzieli ona kartkę na „wnętrze" i „zewnętrze".

Przyznam szczerze, że gdy pierwszy raz zobaczyłam to twierdzenie, wykrzyknęłam: „Przecież to oczywiste!". Problem w tym, że w matematyce pozornie oczywiste fakty często takie nie są. Matematyka opiera się na rygorystycznych dowodach, a proste i intuicyjne stwierdzenia często najtrudniej udowodnić.

Istnieją obiekty, które się matematykom nie śniły

Janiszewski żył jedynie 32 lata, padł ofiarą grypy, hiszpanki, która nawiedziła Europę tuż po I wojnie światowej. Nie doczekał wydania pierwszego tomu swojego pisma „Fundamenta Mathematicae". Tym bardziej imponujące są jego osiągnięcia. Nie tylko umysł, ale i ciało poświęcił nauce: po śmierci zapisał je medycynie.

Zainteresowanie topologią przejął po nim jego wybitny uczeń Kazimierz Kuratowski. W mojej ocenie jego najważniejszym osiągnięciem jest pewne twierdzenie z dziedziny teorii mnogości: lemat Kuratowskiego-Zorna, który zapewnia, że w zbiorach spełniających pewne warunki istnieje element maksymalny, choć twierdzenie nie wskazuje, który to element.

Pozwala to więc matematykom dowodzić istnienia obiektów, których nie potrafią skonstruować ani wskazać. Studenci spotykają lemat Kuratowskiego-Zorna na przeróżnych przedmiotach, od algebry po topologię.

Bez przesady można napisać, że to twierdzenie ma fundamentalne znaczenie dla współczesnej matematyki.

Twierdzenia na eksport

Nie sposób wymienić wszystkich przedstawicieli warszawskiej szkoły matematycznej ani ich osiągnięć. Zbudowali niemal z niczego jedną z najsilniejszych grup matematycznych na całym świecie.

Polskie nazwiska do dziś wypełniają strony podręczników i monografii matematycznych, a nasze zdolności w tej dziedzinie stały się niemal legendarne. Tuż po II wojnie światowej władze chwaliły się, że Polska eksportuje „węgiel i twierdzenia matematyczne", i było to prawdą. Dziś nasz węgiel już nie jest powodem do dumy, ale matematyka – wciąż tak. Gdy zaczynałam studia w Wielkiej Brytanii, jeden z wykładowców mnie pocieszył, że jego przedmiot na pewno nie sprawi mi trudności, bo przecież... „wy, Polacy, macie matematykę we krwi".

Autorka jest doktorantką na wydziale matematyki na Imperial College London, popularyzatorką nauki, finalistką konkursu FameLab. Prowadzi własnego bloga (paularowinska.wordpress.com), publikuje m.in. w serwisie Crazy Nauka, magazynie studenckim "Felix"

Notatki

Ale Historia nr 59, wydanie z dnia 11/03/2019 „Wielcy matematycy znani i nieznani", str. 6

Poznańska szkoła pogromców Enigmy

Gdyby nie prof. Zdzisław Krygowski i jego nadzwyczaj zdolni studenci matematyki z Uniwersytetu Poznańskiego, to II wojna światowa trwałaby o wiele dłużej i pochłonęła znacznie więcej ofiar.

Bogdan Piotrowski

W końcu grudnia 1932 r. w zaciszu gabinetów Biura Szyfrów Wojska Polskiego, które mieściło się w Pałacu Saskim w Warszawie, matematyk i kryptoanalityk Marian Rejewski jako pierwszy skonstruował teoretyczny model funkcjonowania niemieckiej maszyny szyfrującej Enigma. Dzięki zastosowaniu teorii permutacji Rejewskiemu oraz jego współpracownikom – Jerzemu Różyckiemu i Henrykowi Zygalskiemu – udało się dokonać niemożliwego: rekonstrukcji niemieckiej maszyny szyfrującej. Na przełomie 1932 i 1933 r., tuż przed dojściem do władzy w Niemczech Adolfa Hitlera, polscy matematycy zaczęli łamać szyfrogramy Enigmy.

Geniusze i ich promotor

Niemiecka maszyna szyfrująca, której początkowo używano do celów handlowych, a potem do szyfrowania tajnych informacji wojskowych, stała się tematem wielu książek i filmów. Z reguły pomijają one odkrycia polskich matematyków. Historycy nie mają jednak wątpliwości – bez dokonań trójki Polaków z Uniwersytetu Poznańskiego alianci przez niemal całą wojnę nie znaliby zamiarów przeciwnika.

Sukces Rejewskiego, Różyckiego i Zygalskiego był poprzedzony studiami w Poznaniu i współpracą z innym wybitnym matematykiem – prof. Zdzisławem Krygowskim, ówczesnym prezesem Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Byli wychowankami profesora, który uchodzi za twórcę poznańskiej szkoły matematyki.

Siłą sprawczą we wszystkim, co w ówczesnym Poznaniu dotyczyło matematyki, był profesor Zdzisław Krygowski – pisze Marek Grajek w książce „Enigma. Bliżej prawdy".

Urodził się 22 grudnia 1872 r. we Lwowie, a jego ojciec Antoni wykładał matematykę i fizykę w gimnazjach w Tarnopolu, Tarnowie i we Lwowie, był też dyrektorem gimnazjum w Wadowicach. W 1890 r. Zdzisław rozpoczął studia na Wydziale Filozofii Uniwersytetu Jagiellońskiego. Pięć lat później zdał egzamin na nauczyciela matematyki i fizyki, otrzymał też promocję na doktora nauk filozoficznych. Początkowo uczył w Wyższej Szkole Realnej w Krakowie, ale kontynuował studia – w latach 1895-96 był na stypendium w Berlinie (pod kierunkiem Lazarusa Immanuela Fuchsa i Hermana Amandusa Schwarza), a przez kolejne dwa lata pracował na Uniwersytecie Paryskim. W czasopismach polskich i francuskich opublikował ok. 30 tekstów o funkcjach eliptycznych i hipereliptycznych.

W 1901 r. związał się z Politechniką Lwowską. W 1908 r. habilitował się i został profesorem nadzwyczajnym, a rok później zwyczajnym. 13 grudnia 1908 r. objął katedrę matematyki po tragicznej śmierci prof. Stanisława Kępińskiego. W latach 1917-18 pełnił funkcję rektora tej szanowanej w świecie uczelni.

Widocznie jednak odczuwał potrzebę zmiany, bo kiedy w 1919 r. w Poznaniu inaugurował swoją działalność nowy uniwersytet, Krygowski skusił się na propozycję władz nowej uczelni, by objąć jedną z dwóch katedr matematyki na świeżo utworzonym wydziale filozoficznym.

Propozycja z Poznania pozornie nie była atrakcyjna. (...) Krygowski był jednak indywidualnością, która potrafi szybko znaleźć uznanie i wdzięczność w każdym otoczeniu. Szybko zdołał przyciągnąć do współpracy oraz wychować krąg współpracowników znany później jako poznańska szkoła matematyczna – pisze Marek Grajek.

Pojęcie to na pewno funkcjonowało już w 1926 r., skoro właśnie wtedy Krygowski objął stanowisko prezesa Polskiego Towarzystwa Matematycznego, organizacji o uznanej renomie na świecie.

Niezwykle tajna prośba

Na Uniwersytecie Poznańskim prof. Krygowski zorganizował seminarium poświęcone funkcjom analitycznym. O jego wysokiej pozycji świadczy to, że w latach 1920-21 był dziekanem wydziału filozoficznego, a także – dwukrotnie – prorektorem uniwersytetu.

Gdyby nie jego naukowa intuicja i wiedza, Polacy jeszcze długo męczyliby się z szyframi Enigmy. To właśnie Krygowski został bowiem poproszony przez Biuro Szyfrów Wojska Polskiego o dość rzadką przysługę. Przychylając się do niej, w styczniu 1929 r. na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Poznańskiego, który mieścił się w byłym zamku cesarza Niemiec Wilhelma II, profesor zorganizował tajny kurs kryptologii dla najzdolniejszych studentów.

Wybór padł na Poznań z dwóch względów: po pierwsze, tutaj niemal każdy dorosły biegle mówił po niemiecku, a po drugie, z uwagi na renomę poznańskiej matematyki. Sprawa była tak bardzo utajniona, że w przygotowania do kursu nie wtajemniczono nawet sekretarki Krygowskiego. Była bowiem pochodzenia niemieckiego, a przedsięwzięcie skierowane było wywiadowczo przeciwko Niemcom.

Nic więc dziwnego, że na spotkanie inauguracyjne kursu oficerowie Biura Szyfrów Wojska Polskiego, major Franciszek Pokorny oraz porucznik Maksymilian Ciężki, przybyli ubrani po cywilnemu. Zajęcia odbywały się w tajemnicy w poznańskiej Cytadeli, dokąd ponad 20 wytypowanych studentów dojeżdżało tramwajem. Kurs prowadzili major Pokorny, porucznik Ciężki oraz inżynier Antoni Palluth.

Program obejmował podstawy kryptologii oraz działy analizy matematycznej, m.in. permutacje i rachunek prawdopodobieństwa, które miały zastosowanie w kryptologii. Po przedstawieniu kursantom teoretycznych podstaw konstrukcji i łamania różnego rodzaju szyfrów przyszła pora na ćwiczenia praktyczne. Wśród nich największy nacisk położono na metody łamania poprzednika Enigmy – szyfru podwójnego przestawienia – opisuje Grajek.

Z ponad 20 najlepiej rokujących studentów wskazanych przez Krygowskiego wyłoniono trójkę najbardziej obiecujących: urodzonego w Bydgoszczy Mariana Rejewskiego, poznaniaka Henryka Zygalskiego oraz pochodzącego z Kresów Jerzego Różyckiego. Ta trójka jesienią 1930 r. utworzyła ambitny i zgrany zespół pracujący dla filii Biura Szyfrów Wojska Polskiego w Poznaniu.

Pogromcy niemieckich szyfrów

Poznańskie Biuro Szyfrów prowadziło dekryptaż przechwyconych niemieckich meldunków radiowych. Kiedy latem 1932 r. filia została rozwiązana, Rejewski, Różycki i Zygalski podjęli pracę w Biurze Szyfrów Sztabu Głównego Wojska Polskiego w Warszawie.

Wydarzenia w Niemczech przynaglały do pracy. Już w 1932 r. dzięki przechwyconym depeszom poznańscy kryptolodzy ze szkoły prof. Krygowskiego zrekonstruowali znaczną część księgi kodowej i przez pół roku czytali korespondencję niemieckiej floty.

Prawdziwym wyzwaniem i przełomem w rekonstrukcji sposobu działania Enigmy były prace w latach 1932-33. W ciągu niespełna miesiąca, pracując samotnie, Rejewski dokonał jednego z najbardziej spektakularnych przełomów w dziejach kryptoanalizy – pisze Marek Grajek. Rejewski dostrzegł cykliczne struktury szyfrów Enigmy i opracował metodę odtwarzania jej kluczy na podstawie znajomości odpowiadających im cykli.

Nad złamaniem niemieckich szyfrów trudzili się też w latach 30. Francuzi i Brytyjczycy. Gdy ci pierwsi byli bliscy rezygnacji, genialni Polacy najpierw w Warszawie, a potem w tajnym ośrodku w Pyrach (Las Kabacki) mimo zmian wprowadzanych przez Niemców do konstrukcji Enigmy regularnie rozszyfrowywali ich depesze. Mało tego – na podstawie swojej wiedzy teoretycznej Polacy zbudowali kopie Enigmy, które w lipcu 1939 r., w przededniu konfliktu zbrojnego, przekazali Brytyjczykom i Francuzom. Kto wie, czy nie był to największy polski wkład intelektualny w zwycięstwo aliantów.

Zmienne losy geniuszy

Różycki zginął w katastrofie morskiej w 1942 r., Zygalski zmarł w 1978 r. na emigracji, Rejewski – w 1980 r. w Bydgoszczy jako skromny księgowy. Ten ostatni spisał swoje wspomnienia. Doczekał się też pomnika w rodzinnym mieście. W listopadzie 2007 r. przed poznańskim zamkiem odsłonięto oryginalny pomnik w kształcie graniastosłupa ku czci matematyków, pogromców Enigmy.

A prof. Krygowski? W 1938 r. przeszedł na emeryturę. W grudniu 1939 r. został wysiedlony przez Niemców ze swojej poznańskiej kamienicy przy ul. Focha 54. Znalazł się w Radomsku, skąd przeniósł się do Krakowa. Kiedy miasto zostało wyzwolone, zaangażował się w wykłady na Politechnice Krakowskiej. W 1946 r. wrócił do Poznania, gdzie wykładał jako zwykły profesor kontraktowy. Zmarł 10 sierpnia 1955 r., spoczywa na cmentarzu przy ul. Lutyckiej.

Wykorzystałem m.in. informacje z książki Marka Grajka „Enigma. Bliżej prawdy", Rebis 2007

Poznańska szkoła matematyczna

Za jej początki uważa się prace prof. Zdzisława Krygowskiego oraz jego studentów – Mariana Rejewskiego, Henryka Zygalskiego i Jerzego Różyckiego – z przełomu lat 20. i 30. Ponieważ jednak obejmowała je tajemnica państwowa, ich dokonania nie były znane. Głośniej o nich zrobiło się dopiero w latach 70. XX w. Po II wojnie światowej sformułowanie „poznańska szkoła matematyczna" związane było z nazwiskiem prof. Władysława Orlicza wywodzącego się ze szkoły lwowskiej. Po wojnie prof. Orlicz opuścił Lwów i został szefem Katedry Matematyki na Uniwersytecie Poznańskim (obecnym UAM). Był specjalistą z zakresu analizy funkcjonalnej i szeregów ortogonalnych. Opracował m.in. teorie przestrzeni funkcyjnych (przestrzenie Orlicza) i udowodnił twierdzenie w analizie funkcjonalnej, zwane twierdzeniem Orlicza-Pettisa.

Ale Historia nr 65, wydanie z dnia 18/03/2019 „Wielcy matematycy znani i nieznani", str. 4

Niech do ostatka będę pożyteczny

Był współtwórcą polskiej szkoły matematycznej, pomysłodawcą i współzałożycielem pisma „Fundamenta Mathematicae", które zrewolucjonizowało myślenie o czasopismach naukowych. Nie dożył ani rozkwitu szkoły, ani ukazania się pierwszego numeru pisma.

Mariusz Urbanek

Zygmunt Janiszewski urodził się w 1888 r. w Warszawie, maturę zrobił we Lwowie, skąd wyjechał na studia w Szwajcarii. Po niespełna roku nauki na politechnice w Zurychu zdecydował się na matematykę. Najpierw w Monachium, potem w Getyndze i w Paryżu. Słuchał wykładów największych gwiazd matematyki: Davida Hilberta, Henriego Poincarégo, Henriego Lebesgue'a, i filozofii: noblisty Henriego Bergsona i Émile'a Durkheima.

Matematyka nie była dla niego wszystkim

Pracę doktorską „O kontinuach nieprzywiedlnych między dwoma punktami" obronił na Sorbonie w 1911 r., ale uważał, że komisja egzaminacyjna nie doceniła wagi jego pracy. – Jeden Lebesgue mnie zrozumiał – powiedział Stefanowi Straszewiczowi, koledze z Zurychu.

Już wtedy, napisał Hugo Steinhaus, matematyka nie była dla niego wszystkim. Zajmuję się matematyką po to, żeby zobaczyć, jak daleko można dojść na drodze czystego rozumowania – tłumaczył Janiszewski w jednej z prac.

Rozprawę doktorską zadedykował Marcowi Sangnierowi, przywódcy francuskiej chrześcijańskiej demokracji, który nawoływał do otwarcia Kościoła katolickiego na idee rewolucji francuskiej i socjalizmu. Domagał się równych praw dla kobiet, wyborów proporcjonalnych, był pacyfistą. W 1910 r. założony przez Sangniera ruch Le Sillon został potępiony przez papieża Piusa X.

Poznał Sangniera osobiście. Stołował się w dofinansowywanej przez Le Sillon paryskiej jadłodajni. Nie chcąc jednak korzystać z taniości owej instytucji, przekazywał comiesięczną różnicę między ceną zwykłą a ceną kooperatywy kasie związku – napisał Steinhaus. Wspominając Janiszewskiego, dodał: Miał zapatrywania komunistyczne, przez całe życie kierował się miłością bliźniego. W szkole realnej we Lwowie oddawał ubrania uboższym kolegom, jako dorosły przeznaczył otrzymaną nagrodę na finansowanie nauki zdolnych dzieci z biednych rodzin.

Po powrocie z Paryża prowadził w Warszawie wykłady z matematyki dla słuchaczy Towarzystwa Kursów Naukowych będącego namiastką polskiej uczelni w opanowanej przez Rosjan stolicy. Nadal sporo podróżował. Spędził kilka miesięcy na uniwersytecie w Marburgu, potem na uczelniach w Bolonii i w Grazu.

Inaczej by oszalał

Kilka lat przed wybuchem I wojny światowej Janiszewskiego poznał słynny geofizyk i glacjolog Antoni Bronisław Dobrowolski. Kilkadziesiąt lat później opowiedział o tym spotkaniu prof. Krzysztofowi Maurinowi. Lato, zaprzyjaźniony dworek, młodzi ludzie zajmowali się flirtowaniem, tańcami i grą w karty. Był wśród nich młody matematyk, z którym prawie nikt nie chciał rozmawiać. Chodzili na wielogodzinne spacery. Wylewały się z niego matematyczne pomysły, idee. Niewiele z tego rozumiałem, ale zdawałem sobie sprawę, że muszę go słuchać, towarzyszyć mu w jego deliberacjach, bo inaczej on oszalałby – po pół wieku Dobrowolski doszedł do wniosku, że był świadkiem narodzin polskiej szkoły matematycznej.

W 1913 r. ściągnięty przez Wacława Sierpińskiego na Uniwersytet Lwowski Janiszewski habilitował się na podstawie rozprawy „O rozcinaniu płaszczyzn przez kontinua". Ale nie był z niej zadowolony. Na egzemplarzu, który ofiarował Straszewiczowi, napisał: Do postawienia na półce, nie do czytania. Coraz bardziej pociągała go filozofia. Na zebraniach, które organizował w warszawskim mieszkaniu, bywali filozofowie: Tadeusz Kotarbiński, Władysław Tatarkiewicz, Władysław Weryho, i matematycy z filozoficznymi inklinacjami, jak Stanisław Leśniewski.

Odczyt habilitacyjny „O realizmie i idealizmie w matematyce" poświęcił kwestiom raczej filozoficznym niż ściśle matematycznym, rozważając, czy przedmioty matematyczne dają się zawsze zdefiniować słowami. Został tzw. docentem prywatnym, z prawem do wykładania na uczelni, ale bez prawa do zatrudnienia. Już jako docent napisał „Poradnik dla samouków: Wskazówki metodyczne dla studiujących poszczególne nauki". Steinhaus: Czytając, trudno uwierzyć, że napisał to dwudziestopięcioletni chłopak.

Z Legionów do sierocińca

Kiedy w 1914 r. wybuchła wojna, zgłosił się do Legionów Piłsudskiego. Został kanonierem (szeregowcem) legionowej artylerii, kampanię zimową 1914/15 odbył w Karpatach. Awansował do stopnia ogniomistrza (sierżanta) i wylądował w Jeżowie pod Piotrkowem Trybunalskim, gdzie zgromadzono kadrę artylerii. Wyżywienie w kadrze było znakomite: ryż, ser szwajcarski, czekoladę i wino hojnie rozdawano pomiędzy żołnierzy – wspominał Steinhaus, który też znalazł się w Jeżowie. Miejscowa ludność głodowała, więc żołnierze mieli za co zdobywać przychylność dziewcząt, które przychodziły do pobliskiego lasku. Oficjalnie „na grzyby".

W 1915 r., po zajęciu Warszawy przez Niemców, armia przeniosła Janiszewskiego najpierw do Warszawy, potem na teren Galicji, gdzie pracował w biurze werbunkowym Legionów. Dostał zgodę na prowadzenie wykładów na Uniwersytecie Lwowskim. Zastępował Sierpińskiego internowanego w Rosji.

W lipcu 1917 r., jak wszyscy legioniści wierni Komendantowi, odmówił złożenia przysięgi na wierność Niemcom i Austro-Węgrom. Ale nie został internowany w obozie w Szczypiornie. Do końca wojny ukrywał się w okolicach Radomia. Za oszczędności utworzył w Ewinie ochronkę dla sierot, których w czasie wojny przybywało. Sam dziećmi się opiekował, ucząc je i troszcząc się o mąkę, kaszę i mleko – pisał Steinhaus. Prowadził sierociniec do końca wojny.

Otrzymał ofertę pracy na reaktywowanym uniwersytecie w Warszawie. Carska uczelnia przestała istnieć, rosyjska kadra uciekła wraz z wkroczeniem do miasta Niemców. Powstał polski uniwersytet, który potrzebował polskich profesorów. Przyjął propozycję. Kazimierz Kuratowski wspominał, że na matematyce było wtedy dwóch młodych uczonych, niezwykle aktywnych i dbających o studentów: Stefan Mazurkiewicz i Janiszewski. Wspólnie prowadzili seminarium z topologii: Posiedzenia seminarium w znacznym stopniu wypełnione dyskusją, nieraz dość zażartą, między Janiszewskim a Mazurkiewiczem były prawdziwą ucztą duchową dla ich uczestników.

Musimy chwycić się środków radykalnych

W 1917 r. opublikował w piśmie „Nauka Polska" artykuł „O potrzebach matematyki w Polsce" – „historycznej doniosłości", ocenił Kuratowski. Rzucił w nim pomysł koncentracji polskich uczonych na tych dziedzinach i zagadnieniach, w których już są mocni, i powołania czasopisma naukowego poświęconego wyłącznie jednej z tych gałęzi matematyki, w których mamy pracowników wybitnych, prawdziwie twórczych i licznych. Bo tylko tak można rozwijać naukę. A nie oddzielnie, bez wiedzy, co robią inni. Nie tylko na świecie, ale nawet w kraju.

Rozmawiał w Getyndze z rosyjskim matematykiem, który żalił mu się, że oddalenie od tych kuźni czy kotłów, w których wytwarza się matematyka, powoduje, że prace powstające poza kilkoma najważniejszymi ośrodkami na świecie zawsze będą pozostawać w tyle. O ileż bardziej stosuje się to do nas! Otóż, jeśli nie chcemy zawsze „pozostawać w tyle", musimy chwycić się środków radykalnych, sięgnąć do podstaw złego. Musimy stworzyć taką „kuźnię" u siebie! – pisał Janiszewski. Tę funkcję miało spełnić pismo, w którym artykuły, także matematyków z Polski, będą ukazywać się w językach tzw. kongresowych – po francusku, angielsku, niemiecku i włosku. Umiędzynarodowienie pisma miało dodatkowy cel. Opublikowane po polsku prace nie przebijały się przez barierę językową i dowody matematycznych twierdzeń często przepadały. A za jakiś czas odkrywano je na nowo, ale już w innych krajach.

Artykuł zawierał wizję polskiej szkoły matematycznej przedstawioną ze zdumiewającą jasnością i precyzją, napisał Kuratowski. Kilka lat później po sukcesach matematyków ze Lwowa Steinhausa i Stefana Banacha mówiono już o współtworzących PSM równorzędnych szkołach: warszawskiej i lwowskiej.

„Fundamenta Mathematicae"

Po wojnie nie wrócił do Lwowa. Stolica odrodzonej Rzeczypospolitej wciąż potrzebowała uczonych. W 1918 r. objął katedrę matematyki na Uniwersytecie Warszawskim i zaczął przygotowywać pierwszy numer wymarzonego pisma.

Ukazało się w 1920 r. Nazwę pisma – „Fundamenta Mathematicae" – wymyślił Janiszewski, był też jego redaktorem naczelnym. Zostało pierwszym na świecie pismem matematycznym, które nie było o wszystkim. Miało zajmować się wyłącznie zagadnieniami teorii mnogości, topologii, teorii funkcji rzeczywistych i logiki matematycznej, za to gromadzić artykuły uczonych z całego świata. Jednak wśród autorów pierwszego numeru byli sami Polacy, ale najwybitniejsi: Banach, Steinhaus, Sierpiński, Mazurkiewicz i Kuratowski. Tak postanowił Janiszewski. „Fundamenta" miały najpierw pokazać światu, jak silna jest w Polsce grupa matematyków zajmujących się wybranymi dziedzinami.

Nie wszyscy wierzyli w sens takiej formuły. Sierpiński wspominał listy m.in. od samego Lebesgue'a, że w końcu zabraknie dobrych autorów i wartych publikacji prac, więc pismo umrze śmiercią naturalną. Obawy te na szczęście okazały się płonne – napisał. „Fundamenta Mathematicae" ukazują się do dziś. W 2019 r. wydano 245. tom pisma.

Zygmunt Janiszewski nie doczekał wydania pierwszego numeru. Nie było w nim także artykułu, który przygotowywał. Nie zdążył.

Ofiara hiszpanki

Po raz pierwszy zachorował na hiszpankę wiosną 1919 r. Szalejąca w powojennej Europie odmiana grypy pochłonęła w ciągu dwóch lat kilkadziesiąt milionów ofiar. Ale Janiszewski wtedy wyzdrowiał.

W grudniu 1919 r. pojechał na Boże Narodzenie do Lwowa. Tam hiszpanka zaatakowała powtórnie. Zmarł 3 stycznia 1920 r. Miał 31 lat. W testamencie odziedziczony po rodzicach majątek przeznaczył na kształcenie jednostek wybitnie zdolnych. Swoje ciało zapisał prosektorium uniwersyteckiemu lub innemu, według uznania wykonawców testamentu. Tłumaczył, że nie chce dzielić ludzi na wyjętych poza nawias, których ciał można używać do badań, i na szanowanych obywateli, którym należy się pogrzeb i grób. Niech do ostatka będę pożyteczny – dodał.

Korzystałem m.in. z: Hugo Steinhaus, „Zygmunt Janiszewski. Wspomnienie pośmiertne", „Przegląd filozoficzny", nr 3/1919; Kazimierz Kuratowski, „Notatki do autobiografii", Warszawa 1981, i „Pół wieku matematyki polskiej 1920-1970", Warszawa 1973; Stefan Straszewicz, „Ze wspomnień o Zygmuncie Janiszewskim", „Wiadomości Matematyczne" VIII (1965); Małgorzata Przeniosło, „Zygmunt Janiszewski: matematyk, legionista, filantrop" (1888-1920), „Niepodległość i Pamięć" nr 1/ 2011

Warszawska szkoła matematyczna

Kształtowała się spośród matematyków Uniwersytetu i Politechniki Warszawskiej w latach 1915-39. Oprócz Zygmunta Janiszewskiego czołowymi jej przedstawicielami byli: Wacław Sierpiński, Stefan Mazurkiewicz (współzałożyciele pisma „Fundamenta Mathematicae"), Karol Borsuk, Kazimierz Kuratowski, Stanisław Leśniewski, Alfred Tarski, a także Samuel Eilenberg i Andrzej Mostowski, których kariera przypadła na lata powojenne.

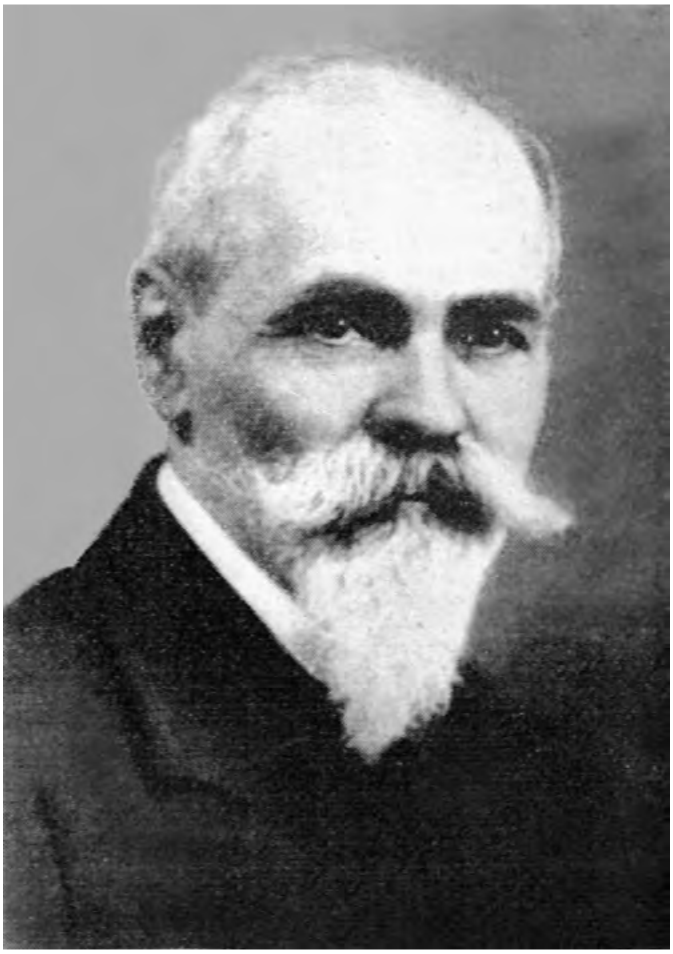
Notatki

Ale Historia nr 71, wydanie z dnia 25/03/2019, str. 7

Matematyk, który nie szedł na łatwiznę

Po doktoracie na Sorbonie przed Stanisławem Zarembą otworzyła się szansa na wielką karierę na Zachodzie. Ale uznał, że bardziej przyda się polskim studentom, i przyjął ofertę z Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Ada Chojnowska



Stanisław Zaremba (1863-1942)
(Fot. Wikimedia Commons)

Wszyscy na UJ wiedzieli, że przy prof. Tadeuszu Ważewskim o Zarembie lepiej nie żartować. Ważewski uchodził wprawdzie za osobę z dużym poczuciem humoru, ale nawet niewinne anegdoty odpadały. Może ze względu na łączącą ich relację mistrz – uczeń? Lub dlatego, że był podwładnym Zaremby? A może z tego powodu, że jego nauczyciel osiągnął w światowej matematyce niezwykle wysoką pozycję. Do końca nie wiadomo.

Pewne jest jedno: dzięki Zarembie rozwinęła się krakowska szkoła matematyczna, w tym również sam Ważewski. Profesor darzył go więc wielką estymą, podobnie jak całe rzesze uczonych, zresztą nie tylko z Polski.

Bez taryfy ulgowej

Stanisław Zaremba, syn Aleksandry (z domu Kurzańskiej) i Hipolita Zaremby, urodził się w 1863 r. we wsi Romanówka na Kijowszczyźnie. Gdy miał dziewięć lat, jego rodzina przybyła do Petersburga. Tam ukończył gimnazjum realne św. Piotra i rozpoczął studia w Petersburskim Instytucie Technologicznym.

Interesował się fizyką matematyczną, nic więc dziwnego, że choć poziom na uczelni był wysoki, po uzyskaniu dyplomu inżyniera technologa w 1887 r. rozpoczął studia na paryskiej Sorbonie.

Po obronie dyplomu licencjata i semestrze spędzonym w Berlinie miał przystąpić do egzaminu doktorskiego. Do wyboru miał dwie ścieżki: zwykły przewód albo ze znacznie obniżonymi wymaganiami, przewidziany dla obcokrajowców. Z taryfy ulgowej nie skorzystał, poddał się pełnej, rygorystycznej procedurze, choć skład komisji i recenzenci mogli onieśmielać: Jean Darboux, Henri Poincaré czy Charles Hermite to były wielkie nazwiska ówczesnej matematyki. Darboux mówił, że prace cudzoziemców zwykle oceniane są z większą dozą wyrozumiałości, jednak Zaremba jej nie potrzebował.

Doktorat zapewnił mu pozycję we Francji, wówczas jednej z największych matematycznych potęg. Publikował w prestiżowych czasopismach, zdobył tytuł profesora, wykładał na uczelni, a także w kilku liceach.

Powrót do ojczyzny

W 1900 r. wszystkich jednak zaskoczył, przyjmując ofertę objęcia II Katedry Matematyki na polskojęzycznym Uniwersytecie Jagiellońskim działającym na terenie ówczesnych Austro-Węgier. Uznał ponoć, że bardziej przyda się polskim studentom kontakt ze światową matematyką niż jemu kariera we Francji. Wyjechał do Krakowa, choć jego żona była Francuzką, dyplomowaną nauczycielką.

Życie francuskie, formy polityczne Republiki, francuską kuchnię i francuskie obyczaje cenił tak wysoko, mówił po francusku i pisał o tyle lepiej niż po polsku, że trzeba było się dziwić, dlaczego nie pozostał w przybranej ojczyźnie, lecz powrócił do prawdziwej – pisał Hugo Steinhaus.

Na UJ pracował jako profesor nadzwyczajny, a po pięciu latach został zwyczajnym. W stan spoczynku przeszedł w 1935 r., a jedyną przerwę w pracy na UJ wymusił nowotwór nerki, który Zaremba leczył we Francji.

Przeprowadzona w 1927 r. operacja usunięcia narządu powiodła się, ale doprowadziła do powikłań. Kuracja była na tyle kosztowna, że wyczerpała finansowo Zarembę. W Paryżu był już jednak na tyle znany, że francuscy uczeni zaproponowali zbiórkę na leczenie. Skrępowany uczony propozycję pomocy jednak odrzucił. Ostatecznie sfinansował terapię dzięki zapomodze od polskiego rządu oraz pożyczce i zasiłku z UJ.

Każdy matematyk powinien go znać

Zaremba tchnął w krakowską katedrę nowego ducha. Znany już w Europie zapraszał na uniwersytet wielu sławnych matematyków z zagranicy. Wprowadzał studentów w najnowsze odkrycia, rozwinął dydaktykę na tyle, że udało się przeprowadzić wiele świetnych doktoratów i habilitacji. W 1907 r. stworzył pierwszy podręcznik „Zarys pierwszych zasad liczb całkowitych". Zaangażował się też w reformę nauczania matematyki w polskich szkołach.

Opublikował ponad 100 prac naukowych i jak twierdził Henri Lebesgue, żadnej nie ogłosił niepotrzebnie. Zainteresowania krakowskiego matematyka koncentrowały się wokół teorii równań różniczkowych cząstkowych, a także związków matematyki z fizyką. Lista jego osiągnięć jest długa i choć zrozumiała jedynie dla specjalistów, wymieńmy najważniejsze: określił m.in. zasady niezmienniczości równania występującego w lepkosprężystości, podał pierwszy przykład obszaru, dla którego klasyczny problem Dirchleta nie ma rozwiązania (na świecie uznano, że to jedno z osiągnięć wyznaczających kierunek rozwoju matematyki w pierwszej połowie XX w.), wprowadził do teorii równań metodę rachunku wariacyjnego i był prekursorem tzw. teorii jąder samoreprodukujących się, wprowadzając tzw. wartość reprodukowania wraz z wyrażającym ją fundamentalnym wzorem.

Świat docenił te dokonania. Jego nazwisko nie może być obce nikomu, kto się interesuje matematyką – pisał Lebesgue. A Émile Picard dodawał: Zaremba jest jednym z najznamienitszych matematyków naszych czasów. Jego piękne prace z teorii równań różniczkowych i teorii funkcji harmonicznych są podziwiane przez wszystkich zajmujących się analizą.

Na koncie miał też prace filozoficzne związane z metodologią fizyki i matematyki. Zaremba potrafił za pomocą prostych i nieoczekiwanych pomysłów rozwiązywać trudne problemy, z którymi nie mogli się uporać inni badacze. Źródłem tych cech (...) była umiejętność filozoficznego spojrzenia na naturę problemu, intuicja fizyczna oraz głęboka erudycja, dzięki której Zaremba był w stanie wykrywać analogie pomiędzy pozornie odległymi zagadnieniami – pisał Ważewski wspólnie z innym matematykiem Jackiem Szarskim.

Spór o wzór

Mimo że osiągnięcia Zaremby są bezsprzeczne, a wprowadzenie teorii jąder samoreprodukujących się uznawane jest za epokowe, mało brakowało, by świat o nim zapomniał. Wystarczyło, że stwAorzony przez niego fundamentalny we wspomnianej teorii wzór niesłusznie został przypisany Stefanowi Bergmanowi, amerykańskiemu matematykowi polsko-żydowskiego pochodzenia.

Choć ów wzór znalazł się już w publikacjach Zaremby z początków XX w., to w latach 20. niemal w tym samym czasie ukazały się dwie prace na podobny temat. Ich autorami byli amerykański matematyk węgierskiego pochodzenia Gábor Szego˝ i wspomniany Bergman. W obu pracach cytowania występują skromnie i nie ma powołania się na Zarembę, choć jego wzór w nich występuje. A że praca Bergmana jest częściej cytowana, odkrycie przypisywane jest właśnie jemu.

Na korzyść Szego˝ i Bergmana może jedynie świadczyć to, że prace naukowe w tamtych czasach nie były publikowane masowo i tłumaczone na wiele języków.

Prof. Franciszek Hugon Szafraniec z Instytutu Matematyki UJ wyśledził jednak, że obaj naukowcy mogli przeczytać pracę Zaremby dostępną w bibliotece Uniwersytetu Humboldta w Berlinie, gdy obaj tam pracowali.

Wydawało się, że sprawiedliwość zostanie Zarembie oddana, gdy w 1950 r. amerykański matematyk Nachman Aronszajn opublikował rozprawę na temat jąder samoreprodukujących się, w której wskazał rolę Zaremby w odkryciu. Jednak niewiele to dało, bo już kolejna praca na ten temat – niemieckiego matematyka Herberta Meschkowskiego – choć wymienia pracę Aronszajna, o Zarembie nie wspomina.

Prof. Szafraniec uważa, że kluczowe dla pomijania Zaremby okazały się dwie kolejne książki Bergmana. W jednej znów nie zacytował jego pracy, a w drugiej owszem, ale nazwisko krakowskiego matematyka trudno w niej wypatrzyć. Wszystkiemu winny ma być specyficzny sposób cytowania stosowany przez Bergmana. Na końcu rozdziału umieszcza on odnośniki do prac, ale nie wiadomo, jakiego fragmentu dotyczą. Nazwisko Zaremby pojawia się za to przy innych rozdziałach, lecz nie tam, gdzie znajduje się wzór jego autorstwa. A także nie tam, gdzie Bergman cytuje prace Aronszajna, które mogłyby go naprowadzić na Zarembę.

Efekt jest taki, że o polskim matematyku nie usłyszeli słowa uczestnicy ważnego sympozjum w 1970 r. w Santa Fe, w którym uczestniczył Bergman. A w ważnej rozprawie z 1997 r. o historii rozwoju matematyki w XX w. jego wzór występuje jako definiujący funkcję jądrową Bergmana. A sam Bergman w kolejnym wydaniu swojej książki nową, jednostronicową sekcję zatytułował niemal tak samo, jak zatytułowana była praca Zaremby.

Na szczęście nie brakuje ludzi, którzy pamiętają o dokonaniach Zaremby i stali się strażnikami jego spuścizny. Jednym z nich jest prof. Szafraniec, który przy każdej okazji upomina się o oddanie sprawiedliwości profesorowi. I zaczęło to przynosić rezultaty, w międzynarodowych publikacjach o odkrytym przez Zarembę wzorze pojawiają się już informacje o nim, chociaż wciąż autorzy najważniejszą część pracy przypisują Bergmanowi.

Jednak prof. Szafraniec odkryty przez krakowskiego matematyka wzór zawsze nazywa „rozkładem Zaremby” i w imię uczciwości naukowej zaprasza do naśladownictwa innych.

Długa lista honorów

Prof. Zaremba nie ograniczał się do pracy na UJ, był też m.in. członkiem Charkowskiego Towarzystwa Matematycznego, Akademii Umiejętności w Krakowie, Królewskiego Czeskiego Towarzystwa Naukowego, Lwowskiego Towarzystwa Naukowego. Od prezydenta RP otrzymał Krzyż Komandorski Orderu Odrodzenia Polski (1925 r.), a od prezydenta Francji Legię Honorową. Otrzymał też nagrodę Paryskiej Akademii Nauk, a doktoraty honoris causa oprócz UJ przyznały mu uniwersytety w Caen (1932) i Poznaniu (1934).

Został pierwszym prezesem powstałego w Krakowie w 1919 r. Towarzystwa Matematycznego, późniejszego Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Angażował się w powstanie Międzynarodowej Unii Matematycznej, najważniejszej organizacji matematycznej na świecie.

Zmarł w 1942 r., spoczywa na cmentarzu Rakowickim w Krakowie.

Korzystałam m.in. z publikacji: „Stanisław Zaremba (1863-1942). Fragmenty biografii w 120-lecie doktoratu” prof. Stanisława Domoradzkiego, „Przypadek Stanisława Zaremby – oportunizm czy nonszalancja” prof. Franciszka Hugona Szafrańca z „Kwartalnika Historii Nauki i Techniki” (t. 61), „Stanisław Zaremba (1863-1942) i jego działalność na rzecz matematyki” prof. Danuty Ciesielskiej i prof. Krzysztofa Ciesielskiego z „Kwartalnika Historii Nauki i Techniki” (t. 60)

Krakowska szkoła matematyczna

Kształtowała się wśród matematyków Uniwersytetu Jagiellońskiego i Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie w latach 1918-39. Oprócz Stanisława Zaremby czołowymi jej przedstawicielami byli: Kazimierz Żórawski, Stanisław Gołąb, Tadeusz Ważewski, Franciszek Leja, Antoni Hoborski, Witold Wilkosz oraz Alfred Rosenblatt. Ich zainteresowania naukowe koncentrowały się przede wszystkim wokół teorii równań różniczkowych, geometrii różniczkowej oraz logiki matematycznej.

Notatki

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Gazeta Wyborcza nr 75, wydanie z dnia 29/03/2019 „Wielcy polscy matematycy znani i nieznani", str. 15

A to Lwowiak atomowiak

Stanisław Ulam, genialny lwowski matematyk, położył podwaliny pod wiele współczesnych metod matematycznych. Bez niego nie powstałaby także amerykańska bomba wodorowa.

Marcin Bójko

1 listopada 1952 r. o godzinie 7.15 lokalnego czasu atolem Enewetak na Pacyfiku wstrząsnęła potężna eksplozja. Kula ognia miała trzy kilometry średnicy, a po chwili zamieniła się w potężną chmurę w kształcie grzyba, która osiągnęła wysokość 40 km i 160 km średnicy. Wybuch – o sile 450 razy większej od bomby, która zniszczyła Nagasaki – wyrwał w koralowych wyspach krater o średnicy dwóch kilometrów i głębokości 50 m.

To był test pierwszej bomby wodorowej, której jednym z kluczowych twórców był Stanisław Ulam, bywalec słynnej kawiarni Szkocka we Lwowie, profesor matematyki.

Był najmłodszym ze lwowskich geniuszy

W swojej autobiografii „Przygody matematyka" wspominał, że od dziecka fascynowały go nauki ścisłe, zeszyty podpisywał „S. Ulam, astronom, matematyk, fizyk". W wieku 15 lat przeczytał traktat o rachunku różniczkowym, dwa lata później „Zarys teoryj mnogości" Wacława Sierpińskiego, dzięki czemu mógł prowadzić długie dysputy z nauczycielem matematyki, który był też wykładowcą na uniwersytecie.

Na Politechnice Lwowskiej już na pierwszym roku spotkał znakomitych wykładowców, twórców lwowskiej szkoły matematycznej: Stefana Banacha, Stanisława Mazura i Kazimierza Kuratowskiego.

Za namową tego ostatniego opracował swoją pierwszą publikację w „Fundamenta Mathematicae", najważniejszym polskim piśmie matematycznym. Dotyczyła arytmetyki na liczbach kardynalnych.

Szybko został bywalcem słynnej kawiarni Szkocka, gdzie przy kawie i koniaku lwowscy matematycy rozwiązywali różne problemy matematyczne. Choć nie miał jeszcze 20 lat, dotrzymywał im kroku. Znalazł np. dowód twierdzenia, zwanego dziś twierdzeniem Mazura-Ulama, na temat przekształceń w przestrzeniach Banacha.

Ulam wspominał, że nie cierpiał egzaminów i miał spore zaległości, na które wykładowcy przymykali oczy, wiedząc, że zajmuje się już pracą naukową. W 1932 roku zdał zaległe egzaminy i w jedną noc spisał pracę magisterską, a już rok później obronił doktorat.

Z tego czasu pochodzi twierdzenie Borsuka-Ulama o punktach antypodycznych mówiące o tym, że dla dowolnej funkcji ciągłej określonej na sferze n-wymiarowej istnieją dwa przeciwległe punkty, w których funkcja przyjmuje jednakowe wartości. Czyli np. zawsze można znaleźć takie dwa miejsca po przeciwnych stronach równika Ziemi, które mają jednakową temperaturę.

Stawiał pasjanse w służbie matematyki

Ulam nie miał szans na stanowisko uniwersyteckie w Polsce, głównie ze względu na żydowskie pochodzenie. Po studiach wyjechał więc do USA na zaproszenie Johna von Neumanna (jednego z pionierów informatyki). Dzięki temu ocalał z Zagłady (zginęła cała jego rodzina poza bratem Adamem, którego tuż przed wybuchem wojny zabrał do USA).

W 1943 r. von Neumann zaangażował go do projektu Manhattan – wielkiego, tajnego przedsięwzięcia amerykańskiego rządu mającego na celu budowę bomby atomowej.

Ulam rozwinął wtedy teorię procesów gałązkowych do modelowania zjawiska powielania neutronów w materiale rozszczepialnym (to kluczowy proces zachodzący podczas eksplozji bomby atomowej).

Był pionierem metod numerycznych, które pozwalają uzyskać przybliżone rozwiązanie, gdy badany problem nie ma w ogóle rozwiązania analitycznego (danego wzorami) lub jest niezwykle złożony.

Do końca wojny większość obliczeń wykonywana była ręcznie lub półręcznie – na mechanicznych kalkulatorach. Pierwsze komputery dopiero zaczynały karierę, ludzie wciąż potrafili liczyć szybciej. Ulam wymyślił genialny sposób na przyspieszenie tych obliczeń.

Jak to zwykle bywa, na pomysł wpadł przypadkowo, kiedy na zwolnieniu lekarskim z nudów układał pasjanse. Zaczął się zastanawiać, jakie jest prawdopodobieństwo, że da się ułożyć pasjansa, ale problem okazał się zbyt skomplikowany, by znaleźć wzór i uzyskać jednoznaczny wynik. Pomyślał jednak, że gdy ułoży odpowiednio dużo pasjansów (a czasu mu akurat na zwolnieniu nie brakowało) i skrzętnie zanotuje wyniki, to zebrana statystyka pozwoli oszacować szukane prawdopodobieństwo. Potem zaczął się zastanawiać, na ile jest to dobre oszacowanie, czyli jaki jest błąd metody.

Uzmysłowił sobie, że takie eksperymentowanie jest bardzo dobrym sposobem na uzyskanie przybliżonego rozwiązania wszelakich złożonych problemów. Można np. w ten sposób modelować powielanie neutronów w bombie atomowej. Śledzenie losu pojedynczego neutronu jest prostym zadaniem, które powtórzone kilka tysięcy razy pozwala wyrobić sobie pogląd na temat całego procesu (bez potrzeby znalezienia dokładnego rozwiązania analitycznego).

Metoda, jak każda inna w projekcie Manhattan, musiała mieć swoją nazwę kodową, więc Ulam wspólnie z kolegami nazwał ją Monte Carlo, od europejskiej stolicy hazardu. Dzięki niej pierwsze komputery mogły prowadzić symulacje różnych procesów, których dokładne rozwiązanie było niemożliwe.

Do dzisiaj metoda Monte Carlo jest z powodzeniem stosowana w symulacjach komputerowych, pozwala bowiem niskim kosztem obliczeniowym oszacować wynik z dobrą dokładnością.

Edwarda Tellera doprowadził do łez

Z niedawno odtajnionych dokumentów wynika, że po wojnie Ulam odegrał także kluczową rolę w opracowaniu najstraszliwszej broni masowego rażenia – bomby wodorowej.

Kiedy w 1949 r. Rosjanie wyprodukowali i przeprowadzili pierwszy test swojej bomby jądrowej (opartej na rozszczepianiu jąder uranu lub plutonu), Amerykanie postanowili stworzyć tysiąc razy potężniejszą superbombę, w której energia wyzwalana byłaby tak jak w Słońcu, a więc przez syntezę jąder wodoru.

Jej budową kierował fizyk węgierskiego pochodzenia Edward Teller, którego Ulam poznał przy projekcie Manhattan.

Kiedy Teller zapoznał Ulama ze swoim pomysłem na zapalnik superbomby, Polak zamknął się w pracowni i przez kilka tygodni prowadził obliczenia. Koniec końców stwierdził, że do eksplozji nie dojdzie. Ładunek wodorowy nie zostanie symetrycznie sprężony ze wszystkich stron i superbomba będzie wielkim niewypałem.

„Teller był bliski załamania, miał łzy w oczach" – wspominał Ulam, który wkrótce sam wymyślił inne rozwiązanie: aby do zapłonu doprowadzić dzięki zjawisku implozji. Zaproponował otoczenie ładunku wodorowego warstwą gęstej pianki z plastiku. Zapalnikiem było promieniowanie X z eksplozji zwykłej bomby atomowej, które dociera do warstwy plastiku jeszcze przed falą uderzeniową (a więc zanim cały ładunek się rozerwie i rozproszy) i momentalnie zamienia piankę w plazmę, która wybuchowo się rozpręża. A wtedy – zgodnie z trzecią zasadą dynamiki „akcji i reakcji" – przeciwny impuls skierowany do wewnątrz spręża wodór, tj. wywołuje implozję. Ulam obliczył, że będzie ona idealnie symetryczna, co doprowadzi do syntezy jąder wodorowych, a w efekcie superwybuchu.

Projekt Tellera-Ulama stał się podstawą konstrukcji pierwszej amerykańskiej bomby wodorowej, która zniszczyła atol Enewetak w 1952 r. (rok później taką eksplozję przeprowadzili także Rosjanie).

Wymyślił Amerykanom wyprawę na Księżyc

Ulam wywarł wpływ na wiele gałęzi matematyki, w tym na teorię mnogości (porównywanie zbiorów nieskończonych), teorię miary (w bardzo dużym uproszczeniu – mierzenie objętości zbiorów) i teorię ergodyczną (o układach, które „zapominają" stan początkowy). Zajmował się także topologią (badanie zbiorów otwartych) i procesami gałązkowymi (procesy rozwidlające się z zadanym prawdopodobieństwem). Wraz z Enrico Fermim, Johnem Pastą i Mary Tsingou badał nieliniowe oscylacje strun.

Jedna z anegdot pokazuje zuchwałość i nieszablonowość w myśleniu Ulama. Kiedy doradca prezydenta Johna F. Kennedy'ego zapytał go, w jakie projekty naukowe nowy prezydent powinien się zaangażować, bez wahania wypalił: „Może wyprawa na Księżyc?".

Nie bez powodu jeden z jego lwowskich mentorów Hugo Steinhaus mówił o nim, że „ze wszystkich ludzi na świecie najlepiej wie, jak stawiać zagadnienia".

Korzystałem z autobiografii Stanisława Ulama „Przygody matematyka", Prószyński i S-ka, 1991

Ale Historia nr 77, wydanie z dnia 01/04/2019, str. 6

Geniusz i już

Studia skończył w ciągu trzech lat, przed trzydziestką miał na koncie 55 prac naukowych, stanowiska profesora i opinię geniusza. Zwierzał się znajomym, że matematyka rujnuje mu zdrowie i gdyby jeszcze raz mógł wybrać, zostałby lekarzem. Zginął w Charkowie.

Beata Maciejewska

Józef Marcinkiewicz
(Domena publiczna)

Krótki życiorys Józefa Marcinkiewicza obrósł legendami – opowiadano, że pochodził z ubogiej chłopskiej rodziny, na maturze miał z matematyki zaledwie trzy plus i właściwie nie chciał się nią zajmować, gdyż pociągała go literatura. Wyprowadzał z równowagi profesorów, bo jako student poprawiał ich na wykładach. Siał grozę wśród studentów, bo jako asystent złośliwie wytykał im ignorancję i wpadał z jej powodu w gniew. Robił przykrość koleżankom, bo zajęty problemem matematycznym potrafił wyjść z kina w połowie filmu. Po prostu genialny ekscentryk.

Marcinkiewiczowie nie byli ubodzy, przedsiębiorczy ojciec zarobił na 40-hektarowe gospodarstwo w podlaskiej kolonii Cimoszka koło Sokółki i wybudował dom, który przypominał bardziej dworek szlachecki niż chłopską chatę, kupował książki. Przed wkroczeniem Rosjan w 1939 r. wywiózł do sąsiadów dwie furmanki woluminów. Z piątki dzieci tylko najstarszy syn nie otrzymał wykształcenia – miał zostać na roli – pozostałe poszły na wyższe uczelnie.

Przedostatni, Józef, rocznik 1910, uchodził za wyjątkowo zdolnego (i bardzo nerwowego, więc lekarz zakazał surowemu ojcu bić go pasem, jak wspominał brat Mieczysław), jako uczeń gimnazjum zarabiał korepetycjami z matematyki ponad 300 zł miesięcznie, czyli dobrą pensję nauczycielską, a dyrektor szkoły chciał, żeby po maturze choć kilka lat popracował jako gimnazjalny matematyk. Ale ponieważ świadectwo maturalne zaginęło, więc kwestii prawdziwości anegdoty o trójkowej ocenie, bardzo smakowitej w życiorysie wybitnego uczonego, nie zdołamy rozstrzygnąć.

Co do ekscentryczności – zdania kolegów i mistrzów są podzielone; co do genialności – wszyscy znający się na matematyce są zgodni. Geniusz i już. Przez Uniwersytet Stefana Batorego w Wilnie przeszedł jak burza, został docentem w wieku 27 lat, jako najmłodszy na tym stanowisku na uczelni. Poznań ofiarował mu katedrę matematyki, a kolejne prace naukowe odbijały się w świecie matematycznym głośnym echem.

Byłem jego profesorem na uniwersytecie wileńskim, wprowadziłem go do pracy badawczej w matematyce, zainteresowałem zagadnieniami, które wówczas mnie bardzo obchodziły… lecz jego rozwój naukowy był tak szybki, a oryginalność pomysłów tak wielka, że w niektórych działach mojej własnej specjalności mogę się tylko uważać za jego ucznia i kontynuatora – pisał o Marcinkiewiczu Antoni Zygmund. Młodego matematyka zajmowały m.in. funkcje zmiennej rzeczywistej, szeregi trygonometryczne, interpolacja i teoria wielomianów trygonometrycznych, operacje funkcyjne, szeregi ortogonalne, funkcje zmiennej zespolonej i rachunek prawdopodobieństwa.

Mistrz czy uczeń

Prof. Zygmund przeniósł się do Wilna z Warszawy w 1930 r., czyli w tym samym czasie, gdy Marcinkiewicz zaczynał studia. Obsada wileńskich katedr matematycznych była mocna – oprócz Zygmunda wykładali także bardzo utalentowany Juliusz Rudnicki (transfer z Politechniki Warszawskiej) oraz Stefan Kempisty, też z Warszawy. Szybko się poznali na Marcinkiewiczu.

Stanisław Kolankowski, który z Marcinkiewiczem chodził na wykłady, zachwycał się jego intuicją matematyczną, która pozwalała mu przewidywać rezultat jakiegoś procesu matematycznego nawet przy pominięciu żmudnej drogi rozumowania. Bardzo często podczas rozwiązywania zadania Marcinkiewicz od razu podawał wyniki, a rozumowanie i dowody dorabiał później, na poczekaniu – wspominał Kolankowski.

Ziutek – jak nazywała go rodzina i koledzy – siedział oparty łokciami o pulpit, od czasu do czasu kwitując pomrukiem dezaprobaty tok rozumowania wykładowcy, bo przecież można to było przedstawić prościej! Albo wstawał i bezczelnie ścierał rozwiązanie, zostawiając tylko wynik, a następnie dopisywał swój wywód. Co nie znaczy, że lekceważył swoich mistrzów. O Rudnickim mówił, że „jest jedynym człowiekiem, który może objąć całość matematyki, bo nigdy nie wiadomo, co on wie", a Kempistego, uważanego przez innych studentów za antytalent dydaktyczny (wymagany przez niego materiał opanowywali ze skryptu, który sami opracowali), cenił za… klarowne wykłady. Młodszemu koledze z wydziału, Leonowi Jeśmanowiczowi, powtarzał wielokrotnie: „Jedyna rzecz, którą dobrze opanowałem, to teoria funkcji zmiennej rzeczywistej". Dzięki Kempistemu, rzecz jasna.

Największy wpływ wywarł jednak na niego Antoni Zygmund. Miał 30 lat, był najmłodszym profesorem na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym USB i od razu zwrócił uwagę na Marcinkiewicza. Bardzo chciał, żeby utalentowany student chodził na jego wykład z teorii szeregów trygonometrycznych, ale Marcinkiewicz był dopiero na drugim roku i ze względu na sztywny program musiałby wystąpić o pozwolenie do Zygmunda. Bardzo mi zależało na tym, żeby to zrobił, ale nie miałem odwagi mu tego zaproponować – wspominał Zygmund.

Marcinkiewicz zgłosił się sam, a prace naukowe, które później prowadzili wspólnie, są najlepszym dowodem ich porozumienia.

Nie polubił za to zajęć ze studentami. Gdy był asystentem, często uważał je za marnowanie czasu i zdrowia, studentów oblewał seryjnie na ćwiczeniach, a ich ignorancja wywoływała u niego wybuchy złości i złośliwości. Mocno odstawał od swoich troszkę tylko młodszych uczniów.

Anegdota głosi, że Zygmund przedstawił na seminarium twierdzenie, ale studenci nie byli w stanie udowodnić jego prawdziwości lub fałszu. Profesor zarządził więc głosowanie i studenci większością głosów uznali je za fałszywe. Kilka tygodni później Marcinkiewicz przyniósł dowód na jego prawdziwość. „Oto do czego prowadzi demokracja" – skomentował prof. Zygmund.

Tańce, szachy, kawiarniane swawole

Przystojny, z dużym poczuciem humoru, nie prowadził życia ascety. Dużo czytał, bywał na wieczorkach literackich, pisywał wiersze, interesował się malarstwem. Wakacje poświęcał na naukę języków obcych, znał biegle angielski, francuski i włoski.

Lubił tańczyć, dobrze grał w brydża i szachy, chętnie chodził do kina i teatru, można go było spotkać w winiarni Pod Okrętem. Był niezłym pływakiem i narciarzem, zimą szusował na wzgórzach Belmontu i Rowów Sapieżyńskich, dbał o wygląd. Ale szczęścia w miłości nie miał. Zakochał się w młodszej o cztery lata koleżance ze studiów Wandzie Onoszko, jednak ona wybrała czarującego studenta fizyki.

Po obronie doktoratu został wysłany do Lwowa, na Uniwersytet Jana Kazimierza. Zatrudniono go jako młodszego asystenta, miał okazję poznać genialnych członków lwowskiej szkoły matematycznej, m.in. Stefana Banacha, Hugona Steinhausa, Juliusza Pawła Schaudera i Stefana Kaczmarza. Z Schauderem i Kaczmarzem blisko współpracował, lwowscy matematycy mieli duży wpływ na jego rozwój naukowy. Dzięki Schauderowi wydał rozprawę o multiplikatorach szeregów Fouriera, dość często cytowaną w literaturze, a z Kaczmarzem opublikował kilka prac o szeregach ortogonalnych.

Bywał w słynnej kawiarni Szkocka, gdzie lwowscy geniusze jedli, pili, palili i debatowali. Twierdzenia, które przeszły do historii matematyki, nie były wysiedziane przy biurku, wypracowane w ciągu wielu tygodni mozolnych obliczeń, tylko pojawiały się nagle, zapisywane najpierw na marmurowym blacie stolika, a potem w zeszycie w kratkę, znanym jako Księga Szkocka. Marcinkiewicz też wpisał się do Księgi, proponując problem dotyczący jednoznaczności rozwiązania pewnego równania funkcyjnego. I chyba mu się to spodobało, bo próbował zaszczepić kawiarniane debaty w Wilnie.

Nie wyszło. Sam brałem udział w kilku eskapadach do cukierni Rudnickiego (nie mieszać z Juliuszem Rudnickim, matematykiem), przysłuchiwałem się rozmowom na tematy matematyczne, lecz jednocześnie czułem, że czegoś tu brak, może tej kropli alkoholu, a może stolików z marmurowym blatem – wspominał Leon Jeśmanowicz.

Wrócił więc docent Marcinkiewicz do pokoju na ul. Zamkowej, z tablicą i wygodnym tapczanem, gdzie mógł dyskutować lub egzaminować na leżąco.

Porucznik profesor

Tuż przed wojną wyjechał na stypendium naukowe do Paryża, a potem do Londynu. W Paryżu czuję się doskonale. Matematycy miejscowi tacy sobie, ale wielu jest etranżerów [cudzoziemców] i można o wielu rzeczach porozmawiać. Poza tym jest się wolnym od zajęć – pisał w liście do prof. Władysława Orlicza z Poznania. Jak twierdziła po latach prof. Irena Sławińska, która studiowała wtedy na Sorbonie, w wolnym czasie razem oglądali miasto. Zaprzyjaźnili się i być może zostaliby małżeństwem, ale Marcinkiewicz wyjechał do Londynu, a potem przyszła wojna.

Nie musiał wracać do Polski, ale chciał „stanąć w potrzebie". Wanda Onoszko w lipcu 1939 r. wysłała do Londynu list z gratulacjami, bo dowiedziała się, że Uniwersytet Poznański daje mu katedrę. Odpisał: Najchętniej wróciłbym na stałe do Wilna, lecz najprawdopodobniej czekają mnie po przyjeździe do Polski – okopy.

Był oficerem rezerwy w stopniu podporucznika, zameldował się w 2. Batalionie 205. Pułku Piechoty Rezerwy wchodzącego w skład 35. Dywizji Piechoty. Batalion dotarł do Lwowa 12 września, Marcinkiewicz spotkał na przedpolach miasta swojego kolegę Stanisława Kolankowskiego: krótka rozmowa o sytuacji, Józef Marcinkiewicz wyraźnie smutny. Lwów się broni – nie poddaje się Niemcom. Zgodnie z rozkazem Naczelnego Wodza, dowódca obrony Lwowa, generał Langner, przekazuje miasto Armii Czerwonej. Kończy się epopeja wrześniowa.

Ale przed porucznikiem Marcinkiewiczem sowiecka niewola – został wywieziony do obozu w Starobielsku (numer rejestracyjny 2160). Współwięźniowie wiedzieli, kim jest, i czuli się onieśmieleni. Jedni go wielbili, inni chcieli się odseparować. Mjr Zbigniew Godlewski, lekarz i szkolny kolega Marcinkiewicza, wspominał, że prosili go o wyciąganie matematyka na spacery, bo dopiero gdy opuszczał salę, mogli swobodniej rozmawiać i żartować, nie narażając się przy tym na krytykę. „Oprócz niewoli sowieckiej jesteśmy jeszcze w jednej niewoli – autorytetu i przeszkadzania uczonemu" – usłyszał Godlewski.

Marcinkiewicz chciał wykorzystać ten czas na pracę naukową, w kartkach wysyłanych do domu prosił o książki matematyczne i dopytywał się o swoje prace. Gdy szedł na wojnę, dał matce gruby rękopis pracy naukowej przywieziony z Londynu i prosił, żeby go strzec jak źrenicy oka. Ale rodzice zostali w czerwcu 1941 r. wywiezieni do ZSRR i pół roku później zmarli w Bucharze, nie zdoławszy nikomu powiedzieć, gdzie ten skarb ukryli. Gdy Kazimierz Marcinkiewicz, brat Józefa (prawnik), przypadkowo go wykopał, była całkowicie zniszczona.

Ostatnia kartka z obozu została wysłana 15 marca 1940 r. Miesiąc później Józef Marcinkiewicz został stracony w Charkowie.

Prof. Antoni Zygmund: Biorąc pod uwagę to, co zdążył on osiągnąć w ciągu swego krótkiego życia i co mógłby osiągnąć w warunkach normalnych, należy uważać jego przedwczesną śmierć za wielki cios dla matematyki polskiej i może najcięższą indywidualną jej stratę w okresie drugiej wojny światowej.

Wspomnienia o Józefie Marcinkiewiczu za: „Józef Marcinkiewicz. Genialny matematyk – męczennik Katynia", praca zbiorowa pod red. J. Marciak--Kozłowskiej i E. Jakimowicz

Notatki

Gazeta Wyborcza nr 81, wydanie z dnia 05/04/2019 „Wielcy polscy matematycy", str. 19

UFO z piątego wymiaru

„– Dzień dobry, czy to hodowla zwierzątek? – Tak, Borsuk przy telefonie". Taki dialog telefoniczny można było często usłyszeć w czasie okupacji w Warszawie.

Marcin Bójko

Nie był to tajny kod konspiracyjny. To profesor matematyki Karol Borsuk sprzedawał wymyśloną przez siebie grę planszową „Hodowla zwierzątek", by jakoś związać koniec z końcem, gdy Niemcy zamknęli Uniwersytet Warszawski. Dziś gra znana jest pod nazwą „Superfarmer".

Karol Borsuk to jedna z najznamienitszych postaci warszawskiej szkoły matematycznej. Jego specjalnością była topologia, którą rozwijał ze swoim uczniem i doktorantem Samuelem Eilenbergiem.

Topologia zajmuje się badaniem tych własności obiektów – figur geometrycznych, brył etc. – które nie ulegają zmianie, nawet po ich mocnym zdeformowaniu. Dopuszczalne są najbardziej radykalne zniekształcenia – rozciąganie, zaginanie czy ściskanie, ale niedozwolone jest przecinanie i sklejanie. Wyobraźcie sobie, że obiekty są wykonane z plasteliny i możecie je dowolnie ugniatać i formować, byle nie rozrywać i nie sklejać ze sobą żadnych kawałków.

Z punktu widzenia topologii kula jest równoważna sześcianowi i stożkowi, a trójkąt jest tym samym co koło czy kwadrat. Podobnie kubek nie różni się od torusa, bo drogą stopniowych deformacji można je w siebie przekształcić (zobacz animację na Wyborcza.pl/matematyka). Krąży żart, że topolog to matematyk, który nie potrafi odróżnić kubka do kawy od obwarzanka.

Borsuk zajmował się topologią geometryczną, czyli uogólnianiem pojęć geometrycznych na coraz bardziej złożone poziomy abstrakcji, np. więcej niż trzy wymiary.

Eilenberg specjalizował się zaś w topologii algebraicznej, która przestrzeniom i przekształceniom topologicznym przyporządkowuje obiekty algebraiczne (takim obiektem jest np. zbiór liczb całkowitych z dodawaniem albo liczb wymiernych z mnożeniem). Operując metodami algebry, można wysnuć wnioski na temat własności topologicznych badanych przestrzeni.

Borsuk wkładał okulary, gdy zaglądał w 17 wymiarów

Już w pracy doktorskiej, którą bronił w 1930 r. na Uniwersytecie Warszawskim, Borsuk wprowadził pojęcia retraktów, które do dziś są jednym z podstawowych narzędzi stosowanych w topologii. Retrakty to – w uproszczeniu – podzbiory przestrzeni topologicznych, które mają taką własność, że cała przestrzeń może zostać w nie przekształcona w sposób ciągły (sam podzbiór pozostaje przy tym nienaruszony). Retraktem może być punkt, półpłaszczyzna czy kwadrat.

Borsuk wymyślił też pojęcie sympleksu, czyli uogólnił pojęcie trójkąta na wiele wymiarów. Na płaszczyźnie trójkąt to zbiór punktów ograniczonych trzema odcinkami, jego odpowiednikiem w przestrzeni trójwymiarowej jest czworościan (tj. obiekt ograniczony czterema trójkątami). W wyższych wymiarach wyobraźnia zaczyna się gubić, bo analogiem trójkąta w czterowymiarowej przestrzeni jest pentachoron, który ma 10 ścian, 10 krawędzi i 5 wierzchołków (to czterowymiarowy obiekt, który jest ograniczony pięcioma trójwymiarowymi czworościanami). A dalej robi się jeszcze trudniej, np. 10-sympleks ma 11 wierzchołków, 55 krawędzi i 165 ścian i „żyje sobie" w przestrzeni dziesięciowymiarowej.

Po wojnie Borsuk opracował topologiczną teorię kształtu, która przekłada intuicje geometryczne na język topologii (przypomnijmy, że dla topologa widelec i piłka to to samo, ale co innego niż obwarzanek). To z tego czasu pochodzi zaproponowana przez niego przestrzeń topologiczna, zwana przez topologów na całym świecie okręgiem warszawskim, która powstaje przez połączenie łukiem „końców" wykresu funkcji sin (1/x) na odcinku (0,1].

Wykres tej funkcji im bliżej jest zera, tym szybciej oscyluje (bo wartość 1/x ucieka coraz szybciej do nieskończoności). Z jednej strony intuicja podpowiada, że okrąg warszawski w kategoriach topologicznych powinien być tym samym co zwykły okrąg, jeśli patrzymy tylko na charakter przestrzeni, z drugiej – żadne z wcześniejszych narzędzi nie pozwalało przeprowadzić takiego przyporządkowania. Dopiero teoria kształtu Borsuka umożliwiła takie uogólnienie.

Matematyk do końca życia mieszkał w Warszawie i pracował na Uniwersytecie Warszawskim, choć współpracował z dziesiątkami ośrodków matematycznych na świecie.

– Cichy, spokojny, zawsze w szarym angielskim garniturze. Czasami nakładał okulary. Wtedy – mówiono – gdy musiał dojrzeć w przestrzeni coś o wymiarze większym niż 17, bo do mniejszych wymiarów okulary nie były mu potrzebne – wspomina Bogdan Miś, który chodził na jego wykłady z geometrii jako student pierwszego roku na Uniwersytecie Warszawskim. – Świetny wykładowca. Z pozoru ogromnie nieśmiały, robił wrażenie stale speszonego. Ale ten pozór znikał, kiedy zaczynał mówić o matematyce. Wtedy to on onieśmielał – dodaje.

Paradoksalnie największą sławę przyniosła mu „Hodowla zwierzątek", którą z inicjatywy pani Zofii Borsukowej w 15. rocznicę śmierci wydała firma Granna. Planszówka stała się międzynarodowym hitem, wydano ją w wielu wersjach językowych, trafiła do przeszło 20 krajów świata, sprzedano blisko milion egzemplarzy – z pewnością trafiła do szerszego grona odbiorców niż wszystkie prace naukowe profesora razem wzięte, których napisał przeszło 200.

Eilenberg. Profesor „Sammy" z Nowego Jorku

Być może jedną z największych zasług Borsuka było odkrycie talentu Samuela Eilenberga, który był jego studentem – uczęszczał na prowadzone przez Borsuka ćwiczenia z analizy rzeczywistej do wykładów profesora Samuela Dicksteina.

Borsuk zafascynował go topologią, został opiekunem jego doktoratu, wspólnie napisali kilka prac. Ich ścieżki naukowe rozdzieliły się w 1939 roku, gdy Eilenberg wyemigrował za ocean, a kontakty między Warszawą i Stanami Zjednoczonymi przerwała wojna.

Eilenberg stworzył podwaliny pod całą dziedzinę matematyki, która w amerykańskim systemie klasyfikacji stanowi teraz osobny 18. dział matematyki, zwany „teorią kategorii, algebrą homologiczną". Wszystkie prace matematyczne w tym temacie publikowane w USA powinny zawierać stosowny numer, który zaczyna się od 18.

Przez wiele lat pracował na nowojorskim Uniwersytecie Columbia, po wojnie kilkukrotnie prywatnie przyjeżdżał do Polski, trochę zapomniany przez warszawskie środowisko matematyczne. Dopiero w 1991 r. oficjalnie zaproszono go na konferencję matematyczną, na której wygłosił wykład „Czterdzieści lat powojennej topologii".

Był wielkim kolekcjonerem i znawcą sztuki Dalekiego Wschodu. W 1989 r. zaprezentował kolekcję ogromnej wartości Metropolitan Museum of Art, które w dowód wdzięczności ufundowało na Uniwersytecie Columbia profesurę gościnną imienia Samuela Eilenberga. Dzieła z jego kolekcji znajdują się również m.in. w British Museum. W świecie kolekcjonerów sztuki znany był jako „profesor", koledzy matematycy zwali go „Sammy".

Korzystałem z pracy prof. Stanisława Jackowskiego „Samuel Eilenberg – wielki matematyk z Warszawy" i „Matematyki dla humanistów" Michała Szurka

TRZY TWIERDZENIA BORSUKA I JEDEN DZIWNY OKRĄG

1. O antypodach

Na powierzchni kuli ziemskiej w każdej chwili istnieje para punktów antypodycznych (tj. położonych dokładnie po przeciwnych stronach Ziemi), w których temperatura i ciśnienie są takie same.

Autorem tezy był Stanisław Ulam, dowód przedstawił Borsuk w „Fundamenta Mathematicae" w 1933 r.

2. O zaczesaniu

Kuli pokrytej włosami nie można nigdy gładko zaczesać, zawsze jest co najmniej jeden punkt, w którym włosy utworzą wir bez określonego kierunku.

3. O UFO

Przestrzeń euklidesowa wymiaru 3 jest zanurzalna izometrycznie w przestrzeni pięciowymiarowej, czyli – w uproszczeniu – przestrzeń trójwymiarowa da się zwinąć w coś w rodzaju kulki dowolnie małej średnicy w przestrzeni pięciowymiarowej. Podobno Borsuk tak to skwitował: „No to teraz dziennikarze będą mogli pisać, że UFO przybywa do nas z przestrzeni pięciowymiarowej".

4. Warszawski okrąg

Ta figura powstaje przez połączenie łukiem „końców" wykresu funkcji sin (1/x) na odcinku (0,1]. Wykres tej funkcji im bliżej jest zera, tym szybciej oscyluje. W teorii kształtu Borsuka warszawski okrąg jest równoważny zwykłemu okręgowi.

Gazeta Wyborcza nr 87, wydanie z dnia 12/04/2019 „Nauka", str. 17

Złamali szyfr nie do złamania

Do złamania Enigmy przyczyniła się odrobina brawury i ułańskiej fantazji, łut szczęścia, także mrówcza praca, ale przede wszystkim matematyka.

Marcin Bójko

Henryk Zygalski, Jerzy Różycki, Marian Rejewski (Wikimedia Commons/public domain)

„Osiągnięcia techniczne zwykle przyczyniają się do rozwoju przemysłu, służą rozrywce czy komunikacji. Oni uratowali ludzkie życie" – mówił Roberto de Marca, prezes Instytutu Inżynierów Elektryków i Elektroników (IEEE), kiedy w 2005 r. wręczał prestiżowe wyróżnienie IEEE „Milestone" przyznawane za wynalazki, bez których świat wyglądałby inaczej.

Laureatami zostali (pośmiertnie) matematycy z Poznania: Marian Rejewski, Jerzy Różycki i Henryk Zygalski. Doceniono ich za rozpracowanie maszyny szyfrującej Enigma, za pomocą której Niemcy kodowali depesze wojskowe.

Historycy szacują, że dzięki nim II wojna światowa trwała dwa lata krócej!

Szum rotorów

Sercem Enigmy były trzy walce (zwane też rotorami), mające po obu stronach 26 styków połączonych w skomplikowany sposób. Przez ułożone jeden obok drugiego rotory płynął prąd z klawiatury do żarówek z literami, które znajdowały się nad klawiaturą.

Szyfrant wpisywał jawny tekst na klawiaturze, a z podświetlanych żarówek odczytywał litery zaszyfrowanej depeszy.

Kolejność przyporządkowania żarówek do klawiszy zależała od wzajemnego ustawienia walców. Po każdym naciśnięciu klawisza na klawiaturze pierwszy walec obracał się o jedną literę (co zmieniało przypisanie liter z klawiatury do tych na żarówkach), a po wykonaniu pełnego obrotu obracał następny walec (jak licznik kilometrów w samochodzie).

W konsekwencji, nawet jeśli w depeszy powtarzały się litery, to w zaszyfrowanej wiadomości kodowane były różnymi znakami. Dodatkowo wojskowa wersja Enigmy miała tzw. łącznicę kablową, która zamieniała w depeszy pary liter, np. T na W.

Pełen cykl obrotów trzech rotorów następował po przeszło 17 tys. znaków, więc nie było praktycznie szans na to, aby w obrębie jednej depeszy klucz się powtórzył.

Natomiast odszyfrowywanie wiadomości polegało na wpisaniu zaszyfrowanego tekstu do maszyny o takich samych ustawieniach początkowych, jakie miała maszyna, na której dokonano szyfrowania.

Ustawienia maszyny zakodowane były w kluczu rozsyłanym do niemieckich jednostek wojskowych. Klucz zmieniał się codziennie, a żeby dodatkowo utrudnić odcyfrowywanie depesz, każda z nich była kodowana własnym kluczem. Klucz depeszy kodowano kluczem dziennym i umieszczano na początku przekazu.

Odkodowanie trzech pierwszych liter zdradzało więc wstępne położenie rotorów, co było niezbędne do odkodowania pozostałej treści.

Nic tu po lingwistach

W latach 20. XX w. główne metody dekryptażu opierały się na statystyce lingwistycznej. Poszukiwano w zakodowanym tekście powtarzających się liter i po poznaniu języka wiadomości można było odgadnąć, jaka litera szyfru odpowiada literze tekstu jawnego.

Enigma była całkowicie odporna na taką metodę, w związku z tym szef niemieckiej sekcji polskiego Biura Szyfrów, porucznik Maksymilian Ciężki, postanowił sięgnąć po metody matematyczne.

Dlatego w 1930 r. zorganizowano na Uniwersytecie Poznańskim kurs kryptologii, na który profesorowie skierowali swych najzdolniejszych studentów matematyki. Po kursie młodych matematyków zatrudniono w poznańskiej filii Biura Szyfrów.

W tym czasie polski wywiad zdobył handlową wersję Enigmy (prostszą niż wojskowa), a od Francuzów pozyskał cenne dane wywiadowcze, w tym instrukcję obsługi niemieckiej maszyny. To właśnie Ciężki wykazał się ułańską fantazją, w najlepszym jej rozumieniu, bo porwał się na zadanie, z którym nie poradziły sobie wielokrotnie zasobniejsze wywiady Francji i Anglii (dlatego zresztą Francuzi podzielili się danymi wywiadowczymi, uznając je za bezużyteczne).

W 1932 r. poznańska filia Biura Szyfrów została zamknięta, a jej trzej najzdolniejsi pracownicy: Marian Rejewski, Henryk Zygalski i Jerzy Różycki, przenieśli się do centrali w podwarszawskich Kabatach.

Dopiero tam dowiedzieli się o istnieniu Enigmy.

I stanęli przed tytanicznym zadaniem: nie znali struktury połączeń w rotorach oraz nie znali kluczy kodowych (kolejności rotorów i ustawień przełącznicy) ani też wewnętrznej budowy maszyny (tj. jak kolejne litery połączone są z rotorami). Mieli jedynie do dyspozycji prostszą, cywilną Enigmę i jej instrukcję obsługi.

Biorąc pod uwagę, że liczba możliwych kombinacji sięgała 10 do potęgi 114., a liczba wszystkich cząsteczek we Wszechświecie szacowana jest na 10 do potęgi 80 – stopień skomplikowania szyfru był więcej niż kosmiczny.

Niemców zgubiło lenistwo

Trójce matematyków z pomocą przyszedł łut szczęścia. Ponieważ komunikacja radiowa była zawodna, klucz do szyfrowania całej depeszy – zakodowany w trzech pierwszych literach – na wszelki wypadek powtarzano. Polacy wiedzieli więc, że sześć początkowych liter każdego przekazu to dwa takie same teksty kodowane kluczem dziennym.

To pozwoliło Rejewskiemu na wypisanie pierwszych równań permutacyjnych opisujących budowę maszyny. Dysponując odpowiednio dużą liczbą depesz z jednego dnia, można było wywnioskować strukturę połączeń pierwszego rotora, zwłaszcza że szyfranci byli zwykle leniwi i używali do kodowania treści depeszy łatwego do zapamiętania klucza. Na przykład liter AAA, ABC, QWE (te litery są obok siebie na klawiaturze).

Niemcy zmieniali kolejność bębnów co kwartał, więc dysponując depeszami z dziewięciu miesięcy, Polacy zdobyli strukturę połączeń wszystkich trzech rotorów maszyny.

Płachty i bomba

Znając budowę rotorów, Polacy zbudowali kilkanaście replik Enigmy i stanęli przed znacznie trudniejszym zadaniem – jak dysponując maszyną szyfrującą i depeszami (z radiowego nasłuchu), poznać klucze dzienne w rozsądnym czasie. Zanim depesza stanie się bezużyteczna.

Co gorsza, Niemcy zaczęli coraz częściej zmieniać kolejność bębnów w maszynie – najpierw co miesiąc, później co dzień.

Na tym etapie w 1933 r. do Rejewskiego dołączyli Zygalski i Różycki. Zygalski opracował perforowane arkusze, które składane w odpowiedniej kolejności wskazywały położenie dwóch pierwszych rotorów maszyny. Płachty Zygalskiego obliczono za pomocą urządzenia zbudowanego przez Rejewskiego zwanego cyklometrem. Gdy Niemcy zaczęli zmieniać szyfry codziennie, pozwalały one uzyskać klucz dzienny w kilkanaście minut.

Rejewski zaprojektował również urządzenie automatycznie wyszukujące klucze dzienne zwane bombą Rejewskiego. Składało się ono z sześciu zespołów szyfrujących Enigmy, po jednym dla każdej kombinacji rotorów.

W 1937 r. Polacy odcyfrowywali 75 proc. depesz szyfrowanych Enigmą i jako jedyni na świecie (poza Niemcami rzecz jasna) w ogóle potrafili cokolwiek odczytać.

Matematyka się liczy!

Kluczem było zastosowanie teorii permutacji. Atak Rejewskiego na szyfr Enigmy można porównać do rozkładu wielkich liczb na czynniki pierwsze. Matematyk cały proces szyfrowania rozpisał na składowe permutacje, co przypominało nieco rozkład na czynniki pierwsze i pozwoliło rozpracowywać Enigmę po kawałku. Analiza szyfru sprowadziła się do żmudnego, ale wykonalnego sprawdzenia kilku tysięcy kombinacji. Służyły temu właśnie płachty Zygalskiego, a później bomba Rejewskiego.

Jednak w 1938 r. Niemcy do puli rotorów dorzucili dwa kolejne, co dziesięciokrotnie zwiększyło liczbę kombinacji ich ustawień. Zbudowanie tak potężnej maszyny deszyfrującej przekraczało możliwości finansowe naszego wywiadu.

Dlatego wobec nieuchronności wojny w lipcu 1939 r. polski wywiad zaprosił do centrali przedstawicieli wywiadów Francji i Anglii, przekazał im całą wiedzę dotyczącą deszyfrowania Enigmy oraz po jednej maszynie zbudowanej w polskich zakładach. Dla obu wywiadów to był szok, zarówno Francuzi, jak i Brytyjczycy uważali, że maszyna jest nie do złamania.

Prace nad Enigmą kontynuowane były w brytyjskim Bletchley Park. Wiedza przekazana przez Polaków otworzyła oczy brytyjskim matematykom, którym przewodził Alan Turing. Pod jego dyktando powstała maszyna zwana na cześć polskiego wynalazku bombą, którą nieustannie unowocześniano. Potomek bomby w 1943 r. stał się protoplastą współczesnych komputerów.

Korzystałem z tekstu Rejewskiego w „Rocznikach Polskiego Towarzystwa Matematycznego” (1980)

Gazeta Wyborcza nr 93, wydanie z dnia 19/04/2019 „Nauka”, str. 19

Po co nam sinus i cosinus

Na Facebooku ludzie przesyłają sobie mem ze zdjęciem staruszka i podpisem: „Minęło tyle lat, a sinus i cosinus wciąż mi się nie przydały”. Zabawne jest jednak to, że gdyby nie sinus i cosinus, to ten, kto stworzył mem, nie mógłby dołączyć do niego zdjęcia, a także opublikować go na Facebooku, którego zapewne też by nie było.

Marcin Bójko

Bo bez sinusów i cosinusów nie byłoby szeregów Fouriera używanych w telekomunikacji, cyfrowym przetwarzaniu sygnałów (w tym obrazów), a nawet do przechowywania danych.

Francuski matematyk Jean Baptiste Joseph Fourier na początku XIX w. pokazał, że funkcję okresową można przedstawić w postaci sumy (tj. szeregu) sinusów i cosinusów z odpowiednimi współczynnikami. Podał przepis, jak to zrobić, tj. jak obliczać współczynniki w tym szeregu.

Sposób przekształcania funkcji na taki szereg zwany jest transformacją Fouriera, a sam szereg – transformatą Fouriera. Czasami taka suma jest nieskończona, czasami szereg ma tylko kilka wyrazów.

Matematyczna sokowirówka

Badanie tego przekształcenia zwane jest analizą harmoniczną i stanowi ogromny dział matematyki. Jednym z pionierów tej dziedziny jest Antoni Zygmund, polski matematyk, który od 1940 r. pracował w USA i był nauczycielem i mentorem wielu sław analizy harmonicznej, m.in. Józefa Marcinkiewicza, Alberta Calderóna, Leonarda Berkowitza, Eliasa Steina czy Paula Cohena. Był też jednym z twórców chicagowskiej szkoły analizy, która wykorzystywała analizę fourierowską do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Takie równania mają wielkie znaczenie praktyczne – pojawiają się w niezliczonych zagadnieniach z zakresu fizyki, chemii, biologii czy inżynierii.

Na analizę harmoniczną można patrzeć jak na rozkładanie funkcji na czynniki pierwsze, dzięki czemu można łatwiej badać ich własności i wykorzystywać je do różnych celów.

Można to porównać do maszynki, do której wlewamy sok, a ona go analizuje i na wyświetlaczu podaje informację o jego składzie (np. 80 proc. soku jabłkowego 10 proc. soku z aronii, 10 proc. soku porzeczkowego). Transformacją Fouriera w tym przypadku jest działanie maszynki, a transformatą – skład soku. Transformata jest wygodna, bo jeśli np. chcemy komuś podarować sok, to wystarczy mu przesłać skład (transformatę), a on na tej podstawie łatwo może sobie odtworzyć gotowy napój (jak powie matematyk: musi zastosować odwrotną transformację Fouriera).

Jedną z funkcji okresowych, które można poddać transformacji fourierowskiej, a z którą mamy do czynienia na co dzień, jest dźwięk. Transformacja oznacza w tym wypadku rozłożenie dźwięku na sumę fal o określonych częstotliwościach. Gdy znamy wszystkie składowe dźwięku, możemy go odtworzyć (dzięki temu możemy słuchać płyt CD), a także poddać bardzo skutecznej kompresji przez odrzucenie zbędnych składowych (technika ta stosowana jest w plikach MP3).

Co więcej analiza fourierowskich składowych dźwięku pozwala wykryć, czy jest on pochodzenia naturalnego, czy maszynowego, a w szczególności, czy generowany jest np. przez obroty śruby okrętowej. Sonary wojskowe nie tylko oddzielają dźwięki naturalne od sztucznych, ale także dzięki analizie harmonicznej są w stanie stworzyć katalog dźwięków charakterystycznych dla rodzaju jednostki wojskowej (np. łódź klasy Akuła), a nawet dla konkretnej jednostki (np. TK-12 Simbirsk), bo dźwięk wydawany przez śrubę jest jak odcisk palca.

Zaczęło się w Wilnie

Antoni Zygmund urodził się 25 grudnia 1900 r. w Warszawie, która była wówczas częścią zaboru rosyjskiego. W pierwszym roku po odzyskaniu niepodległości rozpoczął studia matematyki na Uniwersytecie Warszawskim. Uczył się od najznamienitszych matematyków warszawskiej szkoły matematycznej: Janiszewskiego, Mazurkiewicza, Sierpińskiego i Dicksteina.

Tam też poznał ledwie trzy lata starszego Aleksandra Rajchmana, który wprowadził go w świat szeregów trygonometrycznych. W 1923 r. obronił doktorat pod jego kierunkiem (choć oficjalnie promotorem był Mazurkiewicz, bo Rajchman był zbyt młody na prowadzenie doktorantów). Po doktoracie kilka lat pracował na Politechnice Warszawskiej, a w 1930 r. opuścił Warszawę i objął katedrę matematyki na Uniwersytecie Stefana Batorego w Wilnie.

Tam poznał młodego matematyka Józefa Marcinkiewicza, z którym aż do wojny tworzył bardzo twórczy i płodny tandem.

Historycy matematyki nie mają wątpliwości, że Marcinkiewicz był geniuszem. Już na drugim roku studiów rozpoczął badania szeregów trygonometrycznych, a także interpolacji wielomianowej. Do roku 1939 opublikował 50 prac, mniej więcej jedną co dwa miesiące. Do kanonów analizy matematycznej weszło twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza, a także pojęcie przestrzeni Marcinkiewicza.

Zygmund opowiadał, że Marcinkiewicz prześcignął go w niektórych działach jego własnej specjalności i z ucznia szybko stał się nauczycielem. Niestety, wojna ich na zawsze rozdzieliła. Marcinkiewicz został uwięziony w Starobielsku jako jeden z wielu polskich oficerów i rozstrzelany przez NKWD. Zygmundowi udało się uciec z rodziną do USA.

Gdyby nie wojna, Marcinkiewicz mógł zostać jednym z najwybitniejszych współczesnych matematyków, a jego wczesna śmierć była prawdopodobnie największą indywidualną stratą w czasie II wojny światowej – twierdził wiele lat później Antoni Zygmund.

Po emigracji do Stanów Zjednoczonych najpierw podjął pracę na MIT w Cambridge, a później w Mount Holyoke College. Małe i ciche miasteczko pozwoliło odpocząć całej rodzinie od wojennego stresu.

Polsko-argentyński tandem w Chicago

W 1947 r. Zygmund przeniósł się na Uniwersytet Chicago, gdzie pracował aż do 1980 r. Znowu w tandemie – z młodym matematykiem Albertem Calderónem, którego poznał w 1948 r. w Argentynie. Ściągnął go do Chicago, czuwał nad jego doktoratem, a później przez wiele lat razem z nim badał równania różniczkowe cząstkowe.

Rozwiązanie tych równań często jest bardzo trudne, ale zastosowanie analizy harmonicznej pozwala uprościć proces i uzyskać wyniki przybliżone, które są wystarczająco dobre, choćby na potrzeby symulacji komputerowych.

Dzięki temu inżynierowie mogli prowadzić skomplikowane symulacje przepływu powietrza wokół skrzydła samolotu czy rozkładu ciepła na łopatkach turbin silników odrzutowych. Analiza harmoniczna pozwalała często na dwudziestokrotne przyspieszenie obliczeń, co jest o tyle ważne, że często lepiej mieć wyniki po kilku dniach, a nie po miesiącu.

Zygmund z Calderónem założyli i prowadzili na Uniwersytecie Chicago słynny ośrodek zajmujący się badaniami nad analizą harmoniczną (Chicago School of Hard Analysis).

W 1959 r. Zygmund został członkiem PAN, w 1961 r. – członkiem amerykańskiej National Academy of Sciences, a w 1972 r. do swojego grona przyjęło go Polskie Towarzystwo Matematyczne. W 1986 r. prezydent Reagan uhonorował go medalem National Medal of Science za „ogromny wkład w analizę fourierowską i jej zastosowania do równań różniczkowych cząstkowych i innych dziedzin analizy, a także za stworzenie i prowadzenie najmocniejszej szkoły badań analitycznych we współczesnym świecie matematycznym". Zmarł 30 maja 1992 r. w Chicago.

Bez jego badań współczesny świat na pewno wyglądałby inaczej. Współczesna analiza harmoniczna odkrywa coraz to nowe zastosowania dla transformacji i transformat Fouriera i naprawdę trudno zliczyć jej zastosowania. To chyba najbliższy życiu dział matematyki, który rozwiązuje metodami matematycznymi wszelkie problemy, z jakimi borykają się inżynierowie. Matematyk, który planuje karierę w analizie harmonicznej, z pewnością będzie miał pełne ręce (ciekawej) roboty.

Korzystałem z: Józef Marcinkiewicz, „Collected Papers", red. A. Zygmund, PWN Warszawa 1964, 1-33

Fourier i kotki

Każde zdjęcie kotka, które robimy smartfonem, żeby wystawić na Facebooku, zapisywane jest na karcie pamięci w formacie JPG. To format pozwalający usunąć z cyfrowego obrazu te dane, które dla ludzkiego oka są nieistotne, zawierający tylko najważniejszą część informacji. W konsekwencji zdjęcie zajmuje nawet 20 razy mniej miejsca niż pierwotny obraz. Algorytm JPG wykorzystuje do kompresji właśnie szeregi trygonometryczne

Gazeta Wyborcza nr 98, wydanie z dnia 26/04/2019 „Wielcy polscy matematycy znani i nieznani", str. 19

Kraków różniczek się nie boi

Polska szkoła matematyczna kojarzona jest głównie z Lwowem i Warszawą. Należy jednak pamiętać, że Polskie Towarzystwo Matematyczne powstało w Krakowie.

Marcin Bójko

Lwów ze słynną kawiarnią Szkocką był prawdziwą bohemą matematyczną, gdzie rozwinięto analizę funkcjonalną. Specjalnością warszawskiej szkoły matematycznej była geometria i wyrosła z niej topologia. Wilno specjalizowało się w analizie harmonicznej, a o Poznaniu niewiele było wiadomo, bo tu zajmowano się problemami ściśle tajnymi (to tutejsi matematycy złamali Enigmę za pomocą teorii permutacji).

Natomiast Kraków zajął się najpraktyczniejszą stroną matematyki – równaniami różniczkowymi. O ile Lwów i Warszawa dostarczały głównie matematycznych narzędzi, o tyle w Krakowie powstawały gotowe rozwiązania. Najróżniejszych praktycznych problemów.

Równania różniczkowe są bowiem jednym z podstawowych sposobów stosowanych przez fizyków do opisywania świata. Nawet najprostsze wzory fizyczne, te, których uczymy się w szkole – opisujące prędkość, położenie i przyspieszenie obiektów w zależności od czasu – mają korzenie w równaniach różniczkowych. Równania opisujące ruch planet, drganie struny, przepływ cieczy, rozchodzenie się ciepła czy zjawiska kwantowe są równaniami różniczkowymi.

Gdy fizyk zaczyna tworzyć model matematyczny jakiegoś zjawiska, to prawie na pewno będzie musiał się mierzyć z równaniem różniczkowym.

A wtedy matematycy suflują mu, co, kiedy i jak można i da się rozwiązać.

Francuzów zachwycił

Jedną z najznamienitszych postaci krakowskiej szkoły matematycznej był Stanisław Zaremba. Urodził się na Ukrainie w 1863 r., gdy Polski nie było. Jego ojciec – inżynier – wysłał go najpierw do szkoły średniej, a potem na studia do Petersburga, gdzie w 1886 r. Zaremba zdobył tytuł inżyniera. Doktorat obronił już trzy lata później na paryskiej Sorbonie. Zdobył szacunek francuskich profesorów (m.in. Jeana Darboux), którzy zwykli byli traktować zagranicznych studentów z pewnym pobłażaniem. Zaremba nie musiał korzystać z taryfy ulgowej.

Potem przez 11 lat uczył matematyki w szkołach średnich we Francji (zaskakujące, ile sław matematycznych ma na koncie nauczanie w szkołach średnich). W tym czasie opublikował wiele prac naukowych, dzięki którym zdobył renomę we francuskim świecie matematycznym – jego wyniki doceniali m.in. genialny Henri Poincaré i Jacques Hadamard.

Był wiek XIX i żyli jeszcze ludzie, którzy byli w stanie ogarnąć całą współczesną sobie wiedzę matematyczną, a metody matematyczne stosowano głównie do rozwiązywania problemów inżynierskich. Doktorat Zaremby poświęcony był przepływowi ciepła w ciałach homogenicznych. Topologia dopiero powstawała, analizy funkcjonalnej jeszcze nie było (Banach urodził się trzy lata po obronieniu przez Zarembę doktoratu).

Zaremba bez trudu mógł robić karierę we Francji, wówczas jednej z największych potęg matematycznych na świecie, ale mimo to wrócił do kraju – w 1900 roku przyjął szefowanie katedrze matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim.

Przywiązywał ogromną wagę do nauczania matematyki w Polsce, m.in. pisał podręczniki w języku polskim, a dzięki swoim kontaktom we Francji zapraszał na wykłady do Krakowa największe sławy matematyczne. To z pewnością przyczyniło się do wciągnięcia Uniwersytetu Jagiellońskiego na szerokie wody świata naukowego.

Równanie różniczkowe. Co to takiego?

W swoich badaniach Zaremba zajmował się głównie równaniami różniczkowymi, które opisują związki wartości funkcji i sposobu zmienności tejże funkcji, co mierzy się tzw. pochodną. Dobrym przykładem jest rozchodzenie się ciepła w ciałach – było to tematem doktoratu matematyka. Wartością dobrze charakteryzującą przepływ ciepła jest temperatura w danym miejscu i danej chwili, ale prędkość przepływu ciepła zależy od różnicy temperatur, czyli od zmiennej zwanej gradientem temperatury. Charakteryzuje on liczbowo, jak mocno w danym punkcie zmienia się temperatura. Im większy gradient, tym większa zmienność. Innym przykładem gradientu jest stromizna. Zbocza Kasprowego Wierchu mają wysoki gradient, boiska piłkarskie – zerowy albo bardzo mały.

Z matematycznego punktu widzenia gradient funkcji to jej pierwsza pochodna, czyli różniczka – pojęcie, z którym spotykamy się w szkole średniej.

Już samo badanie, czy da się wyznaczyć pochodną funkcji, może stanowić ciekawe zagadnienie, ale znacznie ważniejszym problemem jest to, czy da się znaleźć funkcję, dla której zachodzi konkretna zależność między nią samą i jej pochodnymi opisana równaniem. Takie równanie wiążące funkcję i jej pochodne nazywamy równaniem różniczkowym, a gdy funkcja ma kilka zmiennych (na przykład czas i miejsce), to mówimy o równaniu różniczkowym cząstkowym.

Zakaz wjazdu dla matematyków

Te ostatnie równania były specjalnością Zaremby. Przy tym nie skupiał się on na poszukiwaniu funkcji, czyli rozwiązań tych równań – to zadanie pozostawiał inżynierom i fizykom. Dla niego znacznie ważniejsze było pytanie, czy dana klasa równań ma w ogóle rozwiązania, a jeśli tak, to czy rozwiązania są jednoznaczne albo jak wiele jest rozwiązań.

Jedno z osiągnięć Zaremby wiąże się z problemem Dirichleta, czyli znalezieniem funkcji, która byłaby rozwiązaniem równania w pewnym obszarze i jednocześnie przyjmowała określone wartości na brzegu tego obszaru. Zaremba podał pierwszy przykład obszaru, w którym ten problem nie ma rozwiązania. To, jak twierdzą matematycy, wyznaczyło kierunek badań nad równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

Obrazowo rzecz ujmując, Zaremba postawił dla nich znak zakazu wjazdu – tam nie warto się zapuszczać, ta uliczka nigdzie nie prowadzi.

Istnieje czy nie istnieje? Oto jest pytanie

Prace Zaremby, który zmarł w 1942 roku, kontynuował Tadeusz Ważewski. Pierwotnie studiował fizykę, ale Zaremba przeciągnął go na matematyczną stronę mocy. Jego praca doktorska (na Uniwersytecie Paryskim) dotyczyła topologii, lecz później Ważewski skupił się na analizie matematycznej, a w szczególności na równaniach różniczkowych. Dzięki znajomości topologii potrafił w oryginalny sposób dowodzić istnienia rozwiązań równań cząstkowych. Po wojnie został kierownikiem Katedry Analizy Matematycznej UJ.

Wydawałoby się, że dowodzenie istnienia bądź nieistnienia rozwiązań równań bez wskazywania konkretnego równania czy szukania konkretnego rozwiązania jest bezużytecznym zatrzymaniem się w pół drogi. Ale to tylko pozór, bo wiedza na temat tego, czy istnieje rozwiązanie i czy jest jedyne, jest fundamentalna z praktycznego punktu widzenia. Nawet jeśli nie jesteśmy w stanie znaleźć rozwiązania wprost, to możemy wtedy próbować przybliżać konkretny wynik (choćby za pomocą komputera i analiz numerycznych).

Słowem, jeśli wiemy, że istnieje rozwiązanie zadania, to wiemy, że warto szukać. A jeśli wiemy, że istnieje kilka rozwiązań, to możemy wybierać to, które ma sensowną interpretację fizyczną.

Równania jak chusteczki do nosa

Ważewski sformułował tzw. twierdzenie retraktowe, bardzo pomocne przy badaniu, czy dane równanie ma rozwiązanie. Jego ideę można zilustrować za pomocą pudełka na chusteczki do nosa, w którym jest kilka otworów do ich wyciągania. Nie da się jednej chusteczki wyciągnąć przez obydwa otwory naraz bez jej rozerwania (utraty ciągłości funkcji). Jeśli więc wyciągniemy chusteczkę przez dwa różne otwory, to znaczy, że są to różne chusteczki (rozwiązania).

Ta idea zastosowana do równań różniczkowych pozwala wykryć, w jakich przypadkach nie istnieje rozwiązanie (tj. nie ma szans na wyciągnięcie chusteczki bez jej rozerwania) albo czy rozwiązanie nie jest jednoznaczne (tj. mamy do czynienia z różnymi chusteczkami). Jednym słowem, badając topologiczne własności brzegu pudełka (liczba otworów), możemy wyciągnąć wnioski na temat własności funkcji we wnętrzu pudełka albo liczby różnych rozwiązań (chusteczek).

Metoda Ważewskiego badania brzegu zbiorów znalazła ważne miejsce w teorii równań różniczkowych. Swoją drogą ciekawe, jak zagraniczni matematycy radzą sobie z tak bardzo polskim nazwiskiem. Faktem jest, że w cytowaniach starają się jednak używać literki ż.

Notatki

Notatki

Publikacja przygotowana przez Fundację Szkoła z Klasą
na zlecenie Fundacji mBanku.

Autorzy: Justyna Franczak, Agata Łuczyńska, Kamil Paździor, Ewa Szmytkiewicz, Anna Wójcik-Jachowicz, Janusz Żmijski

Redakcja merytoryczna: Agata Łuczyńska i Daria Rodzik

Redakcja językowa i korekta: Judyta Berłowska

Projekt i skład: Karolina Krämer

Zdjęcia i rysunki: Shutterstock (str. 8-9, 15, 24-25, 58-59, 126-127)

Zdjęcie na okładce: Shutterstock

ISBN: 978-83-950024-2-7

Wydanie 1
Warszawa, luty 2020

SZKOŁA Z KLASĄ FUNDACJA

www.szkolazklasa.org.pl
fundacja@szkolazklasa.org.pl

mFundacja

www.mfundacja.pl
fundacja@mbank.pl